

TW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Cursus 1967

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

Prof.dr.ir. W. Eckhaus



TW

2e druk mei 1968

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Inhoud

I.	<u>Algemene stellingen</u>	1
	Definities	1
	Existentiestelling	4
	Eenduidigheid	6
	Baankrommen	8
	Reguliere en singuliere punten	9
II.	<u>Baankrommen in X^2. Singuliere punten</u>	10
	Singuliere punten van lineaire differentiaalvergelijkingen	10
	Singuliere punten van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen	15
III.	<u>Periodieke oplossingen</u>	27
	Voorbeelden	27
IV.	<u>Existentiestellingen. Limit cycles</u>	30
	Theorie van Poincaré-Bendixson	30
	Stelling van Poincaré-Bendixson	34
	Toepassing: vergelijking van Liénard	39
	Stelling van Dragilev-Ivanov	43
	Stelling van Levinson-Smith	43
	Toepassing: vergelijking van Van der Pol	44
V.	<u>Stabiliteit</u>	45
	Definities	45
	Overzicht van de problematiek	47
	Voorbeeld uit de storingsrekening	48
VI.	<u>Lineaire systemen met constante coëfficiënten</u>	50
	Canonieke transformatie	50
	Eigenwaarden	50
	Stabiliteit van de triviale oplossing	52
	Inhomogene vergelijking en fundamentele matrix	55

VII.	<u>Lineaire systemen met variabele coëfficiënten</u>	57
	Theorie van systemen met coëfficiënten, die tot een limiet naderen	57
	Lemma van Gronwall	58
	Systemen met periodieke coëfficiënten	61
	Stelling van Floquet	62
	Enige resultaten van de Floquet-theorie	62
VIII.	<u>Stabiliteit van niet-lineaire systemen</u>	63
	Stelling van Poincaré-Liapounoff	63
	Gegeneraliseerde stelling van Poincaré-Liapounoff	64
IX.	<u>Directe methode van Liapounoff</u>	68
	De Liapounoff-functie	68
	Stellingen van Liapounoff	69
	Toepassingen	72
	Bewijs van Poincaré-Liapounoff-stellingen met de directe methode	73
X.	<u>De ontwikkeling van Poincaré</u>	76
	Analytische constructie van periodieke oplossingen	76
	Betekenis van de seculaire termen	77
	Ontwikkelingsstelling van Poincaré	78
	Periodieke oplossing van de vergelijking van Van der Pol	85
	Een niet-autonoom probleem: vergelijking van Duffing	90
	Resonantietrillingen	93
	Subharmonische resonantie	95
XI.	<u>Methode van Van der Pol</u>	96
	Inleiding asymptotiek	96
	Methode van Van der Pol (intuïtieve afleiding)	97
	Fundering van de methode van Van der Pol	100
	Toepassing	103
	Werk van Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky	104
	Inhomogene Van der Pol-vergelijking (Resonantie)	104

XII.	<u>Relaxatietrillingen</u>	108
	Inleiding	108
	Werk van Liénard	108
	Werk van Carrier en Lewis en van Dorodnicyn	111
XIII.	<u>Asymptotische methoden bij niet-autonome systemen</u>	112
	Inleiding	112
	Problemen met "langzame tijd"	112
	De methode van Mitropolsky (eerste benadering)	113
	Fundering van de methode-Mitropolsky	114
	Toepassing	115
XIV.	<u>Asymptotische ontwikkeling volgens Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky</u>	118
	Formele ontwikkeling	118
	<u>Literatuuroverzicht</u>	122

Hoofdstuk I. Algemene Stellingen

Definitie. $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n.$

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X).$$

$X(t)$ = vector met n componenten $x_1(t) \dots x_n(t)$.

t = reële variabele (meestal de tijd).

f = vector met n componenten f_i .

Voorbeelden. $g_n(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{d^n y}{dt^n} + g_{n-1}(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} +$

$$+ \dots g_0 y = F.$$

Stel $y = x_1; y' = x_2, y'' = x_3 \dots \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = x_n$, dus equivalent met systeem van n vergelijkingen

$$\frac{dx_{k-1}}{dt} = x_k \quad (k \neq n),$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n.$$

Vergelijking van Van der Pol: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \mu(y^2 - 1) \frac{dy}{dt} + y = 0.$

Vergelijking van Duffing: $\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \mu y^3 = \mu h \cos \omega t.$

Definitie. Als f_i niet van t afhangt, dus $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, dan heet het systeem autonoom. Bijv. vergelijking van Van der Pol.

$$y = x_1, \quad \frac{dy}{dt} = x_2 \quad \text{dus:}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2.$$

Definitie lineariteit. Systeem is lineair, als f_i een lineaire functie is van de variabelen $x_1 \dots x_n$.

Homogeen lineair systeem. $f_i = 0$ als $x_1 \dots x_n = 0$.

Eig. homogeen lineair systeem. $f_i(t, \lambda \tilde{X}) + f_i(t, \mu \tilde{X}^*) = f_i(t, \lambda \tilde{X} + \mu \tilde{X}^*)$

$$f_i(t, \lambda \tilde{X}) = \lambda f_i(t, \tilde{X}).$$

Conclusie. Als $\tilde{X}$ een oplossing is, dan is $\lambda \tilde{X}$ ook een oplossing.

Als $\tilde{X}$ en $\tilde{X}^*$ oplossingen zijn, dan is $\lambda \tilde{X} + \mu \tilde{X}^*$ ook een oplossing. Het superpositie principe. Dit geldt niet bij niet-lineaire systemen.

Berekening superpositie principe. $\frac{d\tilde{X}}{dt} = f(t, \tilde{X}).$

$$\frac{d\tilde{X}^*}{dt} = f(t, \tilde{X}^*).$$

$$\lambda \frac{d\tilde{X}}{dt} + \mu \frac{d\tilde{X}^*}{dt} = \lambda f(t, \tilde{X}) + \mu f(t, \tilde{X}^*) = f(t, \lambda \tilde{X}) + f(t, \mu \tilde{X}^*) =$$

$$= f(t, \lambda \tilde{X} + \mu \tilde{X}^*) = \frac{d}{dt} (\lambda \tilde{X} + \mu \tilde{X}^*).$$

Voorbeeld. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\quad X = \cos \omega t, \quad x = \sin \omega t$
 $\quad \quad \quad X = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$

Ter herinnering. Lineaire vergelijking van de n-de orde (dus systeem van n vrijheidsgraden) bezit n lineair onafhankelijke oplossingen. Hierop wordt nog nader teruggekomen.

Continuïteit van f_i .

(Nemytskii en Stepanov)

Neem $t = x_0$. Bij veronderstelling is f_i Lipschitz-continu in de variabelen $x_0 \dots x_n$. D.w.z.

$$|f_i(x_0, x_1, \dots, x_p, \dots, x_n) - f_i(x_0, \dots, x_p^*, \dots, x_n)| \leq k |x_p - x_p^*|$$

voor $|x_p - x_p^*| < \delta$.

Hieruit volgt:

$$|f_i(x_0 \dots x_n) - f_i(x_0^* \dots x_n^*)| \leq k^* \sum_{m=0}^n |x_m - x_m^*|, |x_m - x_m^*| < \delta^*.$$

Opmerking. Existentie van oplossingen kan worden bewezen onder zwakkere condities, maar existentie en eenduidigheid vereisen Lipschitz-continuïteit.

Normen.

(Roseau)

Wij hebben te maken met vectoren met n componenten. De grootte meten wij met een norm, per definitie

$$||X|| = \sum_{m=1}^n |x_m|.$$

(Merk op dat dit niet de gebruikelijke vectornorm $\sqrt{\sum x_i^2}$ is. Deze is hier eenvoudiger en handiger).

Eig. $||X|| = 0 \iff x_n = 0.$

$$||X^{(1)} + X^{(2)}|| \leq ||X^{(1)}|| + ||X^{(2)}||$$

$$||\alpha X|| = |\alpha| ||X|| \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Ook:

$$||\int X dt|| \leq \int ||X|| dt.$$

$f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, zijn weer op te vatten als n componenten van een vector f , elke component is functie van $n+1$ variabelen.

$$||f|| = \sum_{i=1}^n |f_i|. \text{ Dus, de continuïteits conditie is als volgt:}$$

$$||f(t, X) - f(t, X^*)|| \leq \tilde{k} ||X - X^*||$$

$$\text{voor } ||X - X^*|| < \tilde{\delta} \quad (\text{t.a.v. } x_i)$$

$$||f(t_0, X) - f(t_0 + T, X)|| \leq \tilde{k} T \quad (\text{t.a.v. } t)$$

$$\text{voor } |T| < \tilde{\delta}.$$

Existentie stelling.

(Roseau)

Neem willekeurig "punt" $x^{(0)}$ ($x_i^{(0)}$ zijn dus const. beginwaarden).

Definiëer een rij als volgt:

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} = f(t, X^{(0)}) \quad \text{m.b.v. } X^{(1)}(t_0) = X^{(0)}$$

⋮

$$\frac{dX^{(n+1)}}{dt} = f(t, X^{(n)}) \quad \text{m.b.v. } X^{(n+1)}(t_0) = X^{(0)}$$

Dit is equivalent aan:

$$\left. \begin{aligned} X^{(1)} &= X^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\tau, X^{(0)}) d\tau \\ &\vdots \\ X^{(n+1)}(t) &= X^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\tau, X^{(n)}(\tau)) d\tau \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{methode van} \\ \text{successieve} \\ \text{approximaties.} \end{array}$$

Beschouw $X^{(1)}$:

$$||X^{(1)} - X^{(0)}|| \leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, X^{(0)})|| d\tau.$$

Wij voeren in

$$M = \sup_{t \in (t_0, t_0 + T)} ||f(t, X)||.$$

$$||X - X^{(0)}|| < d$$

Dan is $||X^{(1)} - X^{(0)}|| \leq M(t - t_0)$.

Kies nu $|t - t_0| \leq \frac{d}{M} \leq T$ dan geldt

$$||X^{(1)} - X^{(0)}|| \leq d.$$

Wij zullen eerst aantonen dat dit ook geldt voor willekeurige $X^{(n)}$.

$$||X^{(n+1)} - X^{(0)}|| \leq \int_{t_0}^t f(\tau, X^{(n)}(\tau)) d\tau.$$

Stel $||X^{(n)} - X^{(0)}|| \leq d$, dan volgt

$$||X^{(n+1)} - X^{(0)}|| \leq M(t - t_0) \leq d \text{ als } |t - t_0| \leq \frac{d}{M}.$$

Dus (met volledige inductie) is deze eigenschap geldig voor iedere n .

Er bestaat dus een tijdsinterval, zodanig dat $X^{(n)}$ binnen de bol met straal d blijft.

Beschouw nu:

$$||X^{(n+1)} - X^{(n)}|| \leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, X^{(n)}(\tau)) - f(\tau, X^{(n-1)}(\tau))|| d\tau$$

$$||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| \leq 2d; \text{ als nu } 2d < \tilde{\delta}, \text{ dan volgt}$$

$$||X^{(n+1)} - X^{(n)}|| \leq \tilde{k} \int_{t_0}^t ||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| d\tau.$$

Wij hadden al

$$||X^{(1)} - X^{(0)}|| \leq M(t - t_0)$$

dus

$$||X^{(2)} - X^{(1)}|| \leq M \tilde{k} \frac{(t - t_0)^2}{2!}$$

⋮

$$||X^{(n+1)} - X^{(n)}|| \leq M \tilde{k}^n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(met volledige inductie).

$$X^{(n)} = X^{(0)} + [X^{(1)} - X^{(0)}] + \dots + [X^{(n)} - X^{(n-1)}].$$

De reeks rechts wordt term voor term gemajoreerd door een uniform convergente reeks, dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} \text{ bestaat, } = X(t).$$

Dit zijn dus n reeksen voor n componenten. Elke component wordt gemajoreerd door de vectornorm.

Door limietovergang (en wegens de uniforme convergentie)

$$X(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau.$$

Dit is equivalent met

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) \quad X(t_0) = X^{(0)}.$$

Existentie is aldus (constructief) bewezen.

Eenduidigheid.

(Roseau)

Stel $Y(t)$ een andere oplossing

$$Y(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\tau, Y(\tau)) d\tau.$$

Voor $t - t_0$ voldoende klein

$$||Y(t) - X^{(0)}|| \leq d.$$

Nu:

$$||X^{(n+1)} - Y|| \leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, X^{(n)}(\tau)) - f(\tau, Y(\tau))|| d\tau$$

daar

$$||Y - X^{(0)}|| \leq d \text{ en } ||X^{(n)} - X^{(0)}|| \leq d, \text{ geldt}$$

$$||X^{(n)} - Y|| \leq 2d. \text{ Er volgt voor } 2d < \delta$$

$$||X^{(n+1)} - Y|| \leq \tilde{k} \int_{t_0}^t ||X^{(n)} - Y|| d\tau$$

$$||X^{(1)} - Y|| \leq \tilde{k} d(t - t_0)$$

$$||X^{(2)} - Y|| \leq \tilde{k}^2 d \frac{(t-t_0)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$||X^{(n)} - Y|| \leq d \tilde{k}^n \frac{(t-t_0)^n}{(n)!}.$$

Dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ||X^{(n)} - Y|| = 0 \quad \text{dus } X = Y.$$

Autonoom systeem.

(Minorsky)

Laat nu $f = f(X)$.

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \int_{t_0}^t f(X^{(0)}) d\tau$$

$$= X^{(0)} + f(X^{(0)}) \cdot (t-t_0) = X^{(1)}(t-t_0).$$

Voer in $\xi = t - t_0$; dan geldt dus $X^{(1)} = X^{(1)}(\xi)$.
Stel dat $X^{(n)} = X^{(n)}(\xi)$

$$X^{(n+1)} = X^{(0)} + \int_{t_0}^t f(X^{(n)}(\tau-t_0)) d\tau$$

$$\tau - t_0 = \xi'$$

$$X^{(n+1)} = X^{(0)} + \int_0^\xi f(X^{(n)}(\xi')) d\xi' = X^{(n+1)}(\xi).$$

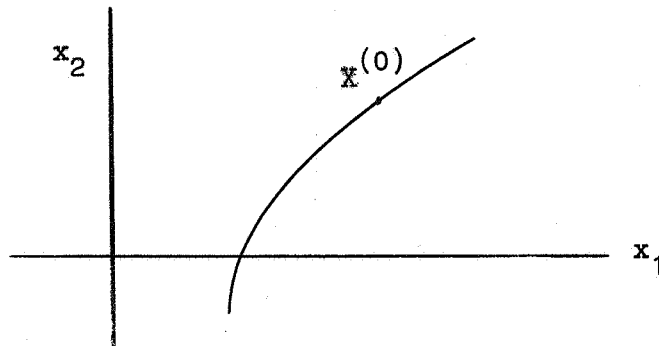
Dus $X^{(n)} = X^{(n)}(\xi)$ voor alle n , en bijgevolg

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} = X = X(\xi) = X(t - t_0).$$

Baankromme. $X = X(\xi, X^{(0)})$ met ξ en $X^{(0)}$ als parameters.

Immers, wij hebben $X_i(\xi, X^{(0)})$, $i = 1, \dots, n$.

Door ξ te elimineren verkrijgen wij in de n -dimensionale X -ruimte een parametrische verzameling $(X^{(0)})$ van $n-1$ -dimensionale oppervlakken. Gegeven $X^{(0)}$ - fixe is zulk een oppervlak, de volledige verzameling van alle toestanden die het systeem ooit kan aannemen, als het eens door $X^{(0)}$ gaat. Uiteraard is de zaak slechts overzichtelijk in 2 dimensies.



Het is een gevolg van de eenduidigheidsstelling, dat door elk punt $X^{(0)}$ één en slechts één baanoppervlak gaat.

Verg. systeem van baanoppervlak.

Kies bijv. $x_i(t) = x_i[x_1(t)]$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dx_1} \frac{dx_1}{dt}.$$

Er volgt:

$$f_1(x_1 \dots x_n) \frac{dx_i}{dx_1} = f_i(x_1 \dots x_n), \quad i = 2, \dots, n.$$

Er volgt dat inderdaad de oplossing eenduidig is voor elk gegeven $x_1^{(0)}, x_i^{(0)}$. (Wij veronderstellen hier niet alle f_i gelijk aan nul. Deel door f_1 , voor $f_1 \neq 0$. Als $f_1 = 0$, dan moeten wij een andere variabele kiezen.)

Reguliere en singuliere punten.

In de X-ruimte noemen wij het punt $X^{(s)}$ singulier als

$$f_i(x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}) = 0 \quad \text{voor alle } i = 1, 2, \dots, n.$$

Anders is het punt regulier.

In een singulier punt hebben wij $\frac{dx_i}{dt} = 0$, voorts is

$$X(t) = X^{(s)} \quad \text{een oplossing.}$$

Uit de eenduidigheidsstelling volgt dat $X(t) = X^{(s)}$ de enige oplossing is die ooit door het singuliere punt gaat.

Dus: singuliere punten zijn stationnaire punten.

Conclusie. Een singulier punt is een baanoppervlak dat tot één punt is gedegenereerd.

Daar door elk punt van de X-ruimte één en slechts één baanoppervlak gaat, gaat door het singuliere punt slechts het oppervlak dat uit dit punt zelf bestaat.

Opl. $X(t)$ met een beginwaarde die niet-singulier is kan in eindige tijd het singuliere punt niet willekeurig dicht naderen.

Echter, voor elk punt van de X-ruimte (binnen het continuïteits-gebied) bestaat een eenduidige oplossing, dus door elk punt gaat een baanoppervlak. Dus ook willekeurig dicht bij singulier punt. Het kan dus gebeuren dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^{(s)} \quad \text{of} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} X(t) = X^{(s)}.$$

In het eerste geval spreken wij van stabiel singulier punt, in het tweede geval van instabiel singulier punt.

Het is overigens niet noodzakelijk dat $\lim_{t \rightarrow \mp \infty} X(t)$ een singulier punt is.

Een andere belangrijke klasse van limieten is die van de periodieke oplossingen (zie later).

Samenvattend. Singuliere punten zijn mogelijke evenwichtstoestanden.

Hoofdstuk II. Baankrommen in X^2 . Singuliere punten

Definitie. Voor een autonoom systeem met $n = 2$ hebben wij:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2); \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2).$$

$$x_1(t) = x_1(x_2) \rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_2} \frac{dx_2}{dt}.$$

Verg. van de baankrommen:
$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}.$$

Lineaire differentiaalvergelijkingen.

$$f_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2$$

Singulier punt is $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Transformatie: $\xi = \alpha x_1 + \beta x_2$

$$\eta = \gamma x_1 + \delta x_2$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha(ax_1 + bx_2) + \beta(cx_1 + dx_2) = \lambda_1(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma(ax_1 + bx_2) + \delta(cx_1 + dx_2) = \lambda_2(\gamma x_1 + \delta x_2)$$

$$\alpha a + \beta c - \alpha \lambda_1 = 0$$

$$\gamma a + \delta c - \gamma \lambda_2 = 0$$

$$\alpha b + \beta d - \beta \lambda_1 = 0$$

$$\gamma b + \delta d - \delta \lambda_2 = 0$$

$$(a - \lambda_1)\alpha + c\beta = 0$$

$$(a - \lambda_2)\gamma + c\delta = 0$$

$$b\alpha + (d - \lambda_1)\beta = 0$$

$$b\gamma + (d - \lambda_2)\delta = 0$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda_{1,2} & c \\ b & d - \lambda_{1,2} \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \rightarrow \underline{\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0}$$

Karakteristieke vergelijking

Wij veronderstellen $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, want als $D = 0$ dan is

$f_1 = \mu f_2$ en zijn de vergelijkingen niet onafhankelijk.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}].$$

Er volgt een canonische vorm:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi \\ \xi &= c_1 e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

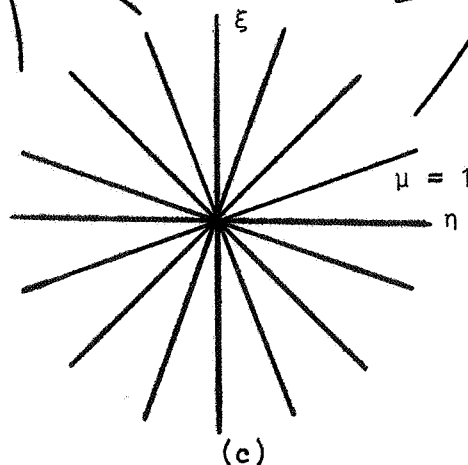
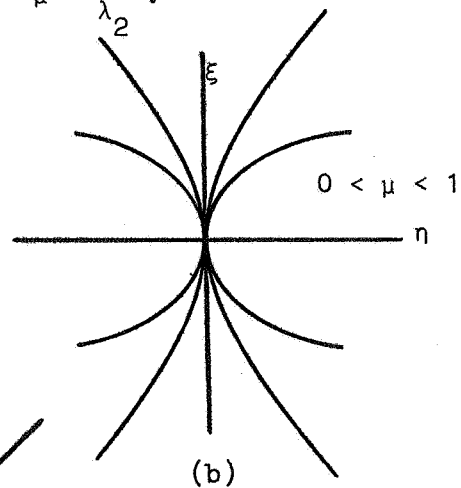
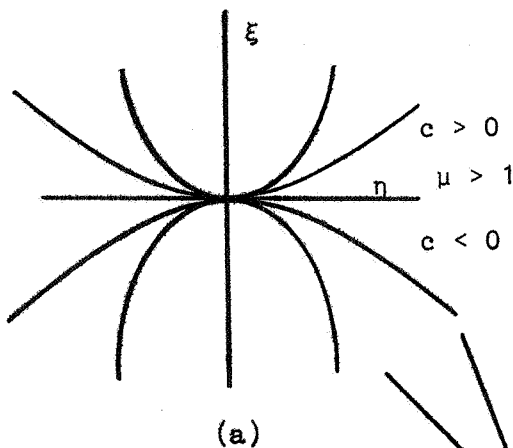
$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta \\ \eta &= c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

1. Knooppunt, node.

$$(a+d)^2 > 4(ad-bc) \rightarrow \lambda_{1,2} \text{ zijn reëel}; \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$$

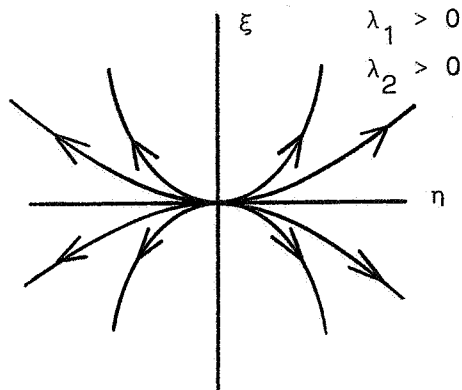
(Dus gelijk van teken)

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\xi}{\eta} \rightarrow \xi = C|\eta|^\mu \text{ met } \mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

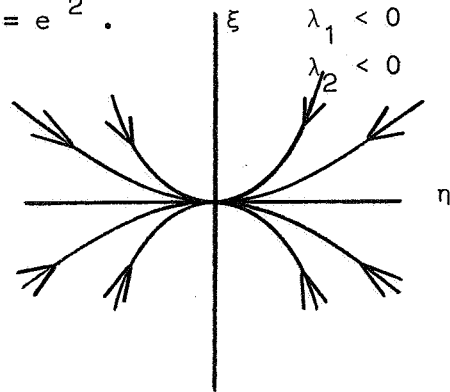


Richtingsveld.

(a)



$$\text{uit } \xi = e^{\lambda_1 t}, \\ \eta = e^{\lambda_2 t}.$$



Analoog bij (b) en (c).

(a), (b) Ontaarde knoop, improper node.

Karakteristiek voor deze singuliere punten is: alle baankrommen (behalve één gedegeneerde as) naderen de oorsprong met een wel gedefiniëerde richting (voor $t \rightarrow +\infty$ of $t \rightarrow -\infty$).

(c) Proper node. Elke kromme heeft een eigen wel gedefiniëerde richting. Gegeven een richting, dan hoort er een kromme bij.

Opmerking. Gaan wij nu terug naar x_1, x_2 dan worden de baankrommen iets vervormd, maar behouden de bovenstaande karakteristieke eigenschappen. Het kan echter gebeuren, dat wij van een "proper" op een "improper" type overgaan.

Voorbeeld. Beschouw $b = 0, a = d$.

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 \quad \frac{dx_2}{dt} = cx_1 + ax_2.$$

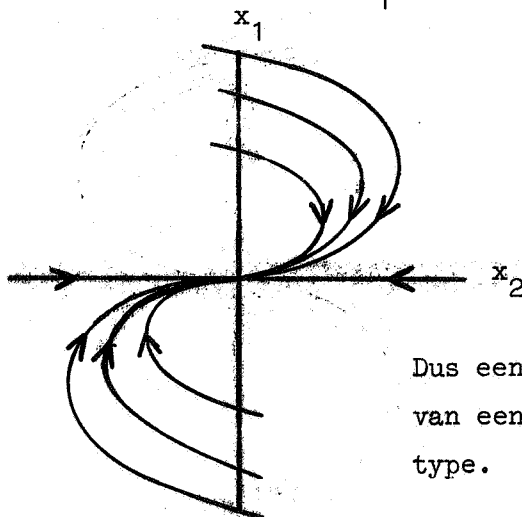
Dan is $\lambda_1 = \lambda_2$ en $\mu = 1$.

$$x_1 = C_1 e^{at} \quad x_2 = (C_2 + cC_1 t) e^{at}.$$

Neem bijv. $a < 0$. $x_1 \rightarrow 0$ als $t \rightarrow +\infty$.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{c}{a} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{c}{a} + \frac{c_2}{c_1} + ct \rightarrow \pm \infty, \text{ afhankelijk van teken van } c.$$

Neem bijv. $c > 0$. $x_2 = 0$ als $t = -\frac{c_2}{c c_1}$.



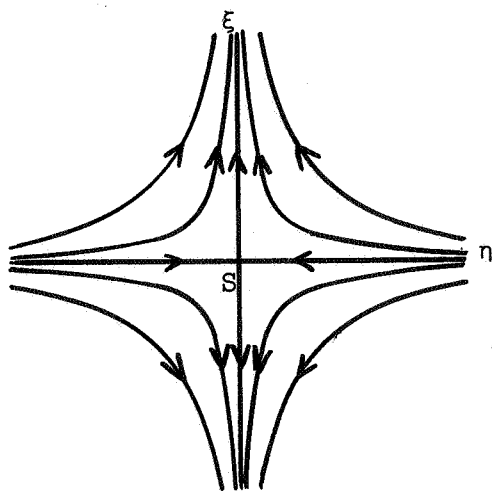
Dus een impropere node
van een vervormd (nieuw)
type.

Samenvattend. Voor een knooppunt naderen de baankrommen de oorsprong
voor $t \rightarrow \pm \infty$ met een wel gedefiniëerde richting.

2. Zadelpunt, saddle.

$\lambda_{1,2}$ zijn reëel; $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ (dus verschillend van teken)

$$\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0 \quad \xi = C|\eta|^{-|\mu|}.$$



Pijltjes corresponderen met
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.
In het andere geval pijlen
omkeren.

Kenmerk: Gegeven een omgeving
van singulier punt S. Met uit-
zondering van de gedegen.krommen
verlaat elke baankromme deze om-
geving in eindige tijd.

3. Spiraalpunt, brandpunt, spiral, focus.

$\lambda_{1,2}$ zijn complex geconjugueerd: $\lambda_{1,2} = \lambda^* \pm i\omega$; $\lambda^* \neq 0$.

Aangezien ξ en η dan complex zijn, is het prettiger terug te gaan naar x_1 en x_2 . Beschouw:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda^* x_1 + \omega x_2 & a &= \lambda^* & b &= \omega \\ \dot{x}_2 &= -\omega x_1 + \lambda^* x_2 & c &= -\omega & d &= \lambda^* \end{aligned}$$

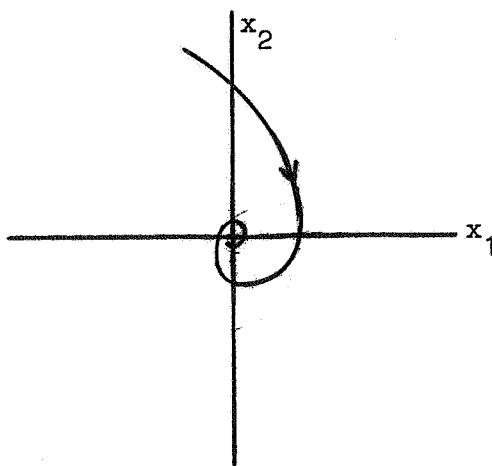
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [2\lambda^* \pm \sqrt{4\lambda^{*2} - 4(\lambda^{*2} + \omega^2)}] = \lambda^* \pm i\omega \text{ inderdaad.}$$

Voer in: $x_1 = r \cos \phi$; $x_2 = r \sin \phi$; $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\phi = \arctg \frac{x_2}{x_1}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \phi - r \sin \phi \frac{d\phi}{dt} = \lambda^* r \cos \phi + \omega r \sin \phi & \left| \begin{array}{c|c} \cos \phi & \sin \phi \\ + & - \end{array} \right| \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = -\omega r \cos \phi + \lambda^* r \sin \phi & \left| \begin{array}{c|c} \sin \phi & \cos \phi \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{dt} = \lambda^* r ; \quad r \frac{d\phi}{dt} = -\omega r$$

$$r = C_1 e^{\lambda^* t} \quad \phi = -\omega t + C_2$$



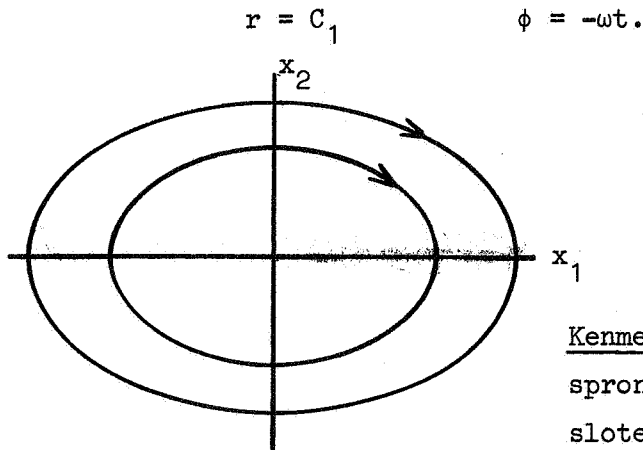
Pijlrichting correspondeert met $\lambda^* < 0$. Voor $\lambda^* > 0$ pijlrichting omkeren.

Kenmerk: Elke baankromme nadert oorsprong voor $t \rightarrow \infty$ of $t \rightarrow -\infty$, maar zonder gedefiniëerde richting.

4. Centrum, wervelpunt, center, vortex point.

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

volgt onmiddellijk uit voorgaande.



Kenmerk: Elke omgeving van oorsprong bevat oneindig veel gesloten baankrommen.

Stelling. Singulier punt is limiet voor alle baankrommen voor $t \rightarrow \infty$ dan en alleen dan, als de reële delen van de wortels van de karakteristieke vergelijking negatief zijn.

Stabiel singulier punt.

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 + bx_2 + f_1^*(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= cx_1 + dx_2 + f_2^*(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_{1,2}^*}{r} &= 0 \\ D &\neq 0 \end{aligned}$$

Stel $f_1^* = f_2^* = 0 \rightarrow$ per definitie gelineariseerd systeem.

Vraag: Is karakter van singulier punt van gelineariseerd systeem hetzelfde als dat van niet-lineair systeem?

Intuïtief: ja! want f_1^* en f_2^* zeer klein. In feite zijn er in sommige gevallen moeilijkheden.

Definitie. Singulier punt, welke limiet is van een (niet gedegen) familie baankrommen voor $t \rightarrow \infty$ of $t \rightarrow -\infty$ noemen wij een limiet-punt.

Knooppunten en spiraalpunten zijn limietpunten, zadelpunten en centra zijn het niet.

Definitie. Stabiel limietpunt is een limietpunt voor $t \rightarrow \infty$.
Instabiel limietpunt is een limietpunt voor $t \rightarrow -\infty$.

Stelling. Als $x_1 = x_2 = 0$ limietpunt is voor gelineariseerde vergelijkingen, dan is het ook limietpunt voor niet-lineaire vergelijkingen.

Opmerking: De meer algemene versie van deze stelling zullen wij later ontmoeten in het Poincaré-Liapounoff theorema.

Bewijs. Beschouw eerst $\operatorname{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$. (Stabiel knooppunt of spiraalpunt).

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi + f_1^*(\xi, \eta)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta + f_2^*(\xi, \eta).$$

Noem $\xi = \xi_1$, $\eta = \xi_2$, dan volgt in vectorvorm:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \lambda_i \xi_i + f_i^*(\xi_1, \xi_2)$$

$$\xi_i = \xi_i(0)e^{\lambda_i t} + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} f_i^*(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) d\tau.$$

Aangezien $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, bestaan er reële getallen $k > 0$ en $\sigma > 0$ zodanig dat

$$|e^{\lambda_i t}| \leq k e^{-\sigma t} \quad t \geq 0.$$

Er volgt:

$$|\xi_i| \leq k|\xi_i(0)|e^{-\sigma t} + k \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} |f_i^*| d\tau.$$

Gegeven $\varepsilon > 0$, dan bestaat er $\delta > 0$ zodanig dat

$$||f^*|| \leq ||\xi|| \cdot \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{voor} \quad ||\xi|| \leq \delta \quad (\text{uit fund. hypothese blz. 15}).$$

Stel $||\xi(0)|| \leq \delta$. Wegens continuïteit bestaat er een interval $(0, t)$ zodanig dat $||\xi|| \leq \delta$.

Er volgt:

$$||\xi|| \leq k||\xi(0)||e^{-\sigma t} + \varepsilon \int_0^t e^{-(t-\tau)\sigma} ||\xi|| d\tau$$

$$e^{\sigma t} ||\xi|| \leq k||\xi(0)|| + \varepsilon \int_0^t e^{\sigma \tau} ||\xi|| d\tau.$$

Bewering:

$$e^{\sigma t} ||\xi|| \leq k||\xi(0)||e^{\varepsilon t}.$$

Demonstratie:

$$\frac{1}{k||\xi(0)||} e^{\sigma t} ||\xi|| = \psi(t)$$

$$\psi(t) \leq 1 + \varepsilon \int_0^t \psi(\tau) d\tau$$

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau = \psi^* \rightarrow \frac{d\psi^*}{dt} \leq 1 + \varepsilon \psi^*$$

$$\frac{\frac{d\varepsilon\psi^*}{dt}}{1 + \varepsilon\psi^*} \leq \varepsilon, \frac{d}{dt} \ln(1 + \varepsilon\psi^*) \leq \varepsilon, \ln(1 + \varepsilon\psi^*) \leq \varepsilon t$$

$$1 + \varepsilon\psi^* \leq e^{\varepsilon t}.$$

Dus

$$\psi(t) \leq e^{\varepsilon t}.$$

Wij hebben dus:

$$||\xi|| \leq k ||\xi(0)|| e^{-(\sigma-\epsilon)t}.$$

Wij kunnen ϵ zodanig kiezen dat $\sigma - \epsilon > 0$. Dus:

Als in den beginne $||\xi|| < \delta/k$ zodanig dat $||f^*|| \leq \frac{\epsilon}{k} ||\xi||$ en $\sigma > \epsilon$, dan blijft $||\xi|| < \delta$ te allen tijde en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||\xi|| = 0.$$

Als nu

$\operatorname{Re}(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ (Instabiel knooppunt of spiraalpunt)

$$\frac{d\xi_i}{dt} = + |\lambda_i| \xi_i + f_i^*$$

$$t = -t^*: \frac{d\xi_i}{dt^*} = - |\lambda_i| \xi_i - f_i^* \quad \text{en dit is juist het geval, dat}$$

wij hiervoor hebben onderzocht.

In feite hebben wij dus het volgende bewezen:

Als 0 stabiel limietpunt is van gelineariseerde vergelijking, dan bestaat er een omgeving $S(0)$ zodanig dat voor $\xi(0) \in S(0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi = 0$.

Als 0 instabiel limietpunt is, dan geldt het bovenstaande t.a.v.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi.$$

Voor instabiele limietpunten is formele resultaat als volgt:

$$||\xi|| \leq k ||\xi(0)|| e^{-(\sigma-\epsilon)(-t)}$$

geldig voor alle $t < 0$, onder de veronderstelling dat bij gekozen

$$\epsilon < \sigma \quad ||\xi(0)|| < \frac{\delta}{k} \quad \text{zodanig dat} \quad ||f^*|| \leq \frac{\epsilon}{k} ||\xi||.$$

Wij hadden uiteraard een andere tijdsoorsprong kunnen kiezen

$$||\xi|| \leq k ||\xi(t_0)|| e^{-(\sigma-\epsilon)(-(t-t_0))}; \quad t < t_0.$$

Veronderstel nu $||\xi(t_0)|| < \delta^*$ en beschouw $t_1 < t_0$

$$||\xi(t_1)|| < ||\xi(t_0)||.$$

M.a.w. Er bestaat een kleine omgeving van de oorsprong $||\xi|| < \delta^*$ zodanig dat indien voor twee tijdstippen t_0 en t_1 , $t_0 > t_1$ geldt

$$||\xi|| < \delta^*$$

dan geldt tevens

$$||\xi(t_0)|| > ||\xi(t_1)||.$$

Conclusie: Karakter van limietpunten t.a.v. stab. wordt weergegeven door gelineariseerde vergelijking.

Het enige dat dus zou kunnen gebeuren is dat gelineariseerd knooppunt overgaat in spiraalpunt en vice versa.

Stelling. Als 0 een spiraalpunt is voor gelineariseerde vergelijking, dan is 0 ook spiraalpunt voor niet-lineaire vergelijking.

Opmerking: Wij weten reeds dat 0 een limietpunt is. Dus $r \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \pm \infty$.

Wij gaan nu over op polaire coördinaten, als op blz. 14.

$$x_1 = r \cos \phi \quad x_2 = r \sin \phi$$

$$r \frac{d\phi}{dt} = -\omega r - \sin \phi f_1^* + \cos \phi f_2^*$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega - \sin \phi \frac{f_1^*}{r} + \cos \phi \frac{f_2^*}{r}.$$

Neem stabiel limietpunt: $r \rightarrow 0$ $\frac{f_{1,2}^*}{r} \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$.

Dus $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\phi}{dt} = -\omega$. $\phi = -\omega t + \varepsilon$.

Opmerking. Knooppunt voor gelineariseerde vergelijking kan een spiraalpunt blijken voor niet-lineaire vergelijking.

Voorbeeld:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\xi - \frac{\eta}{\log \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; \quad \frac{d\eta}{dt} = -\eta + \frac{\xi}{\log \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Gelineariseerde vergelijking geeft een "proper node". Niet-lineaire termen voldoen aan de veronderstellingen.

Ga nu over op polaire coördinaten.

$$\xi = r \cos \phi; \quad \eta = r \sin \phi$$

$$\begin{array}{l} \frac{dr}{dt} \cos \phi - r \sin \phi \frac{d\phi}{dt} = -r \cos \phi - \frac{r \sin \phi}{\log r} \\ \frac{dr}{dt} \sin \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = -r \sin \phi + \frac{r \cos \phi}{\log r} \end{array} \quad \left| \begin{array}{c|c} \cos \phi & \sin \phi \\ + & + \\ \hline \sin \phi & \cos \phi \end{array} \right|$$

$$\frac{dr}{dt} = -r; \quad r \frac{d\phi}{dt} = \frac{r}{\log r}.$$

$$r = c_1 e^{-t}, \quad c_1 = r_0 \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\log c_1 - t}$$

$$\phi = -\log(t - \log c_1) + c_2, \quad \text{met } c_2 = \phi_0 + \log(t_0 - \log r_0).$$

Dus een spiraal die ~~alsmaar~~ sneller draait.

Resumé. Indien gelineariseerde vergelijking limietpunt oplevert, dan is dit inderdaad een limietpunt voor niet-lineaire vergelijking met korrekt karakter t.a.v. stab. Slechts in geval van knoop voor gelineariseerde vergelijking kan een type-verschuiving naar spiraalpunt optreden.

Zadelpunt. Kenmerk van zadelpunt was, dat met uitzondering van η -as, geen enkele kromme 0 tot limietpunt had.

Stelling. Als $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ bestaan en continu zijn in $0 \leq r \leq r_0$, en 0 een zadelpunt is voor de gelineariseerde vergelijking, dan bestaan er voor de niet-lineaire vergelijking, behalve de ~~degenerende~~, geen baankrommen, die 0 tot limietpunt hebben.

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda \xi_1 + f_1^*(\xi_1, \xi_2)$$

$$\lambda > 0.$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\lambda \xi_2 + f_2^*(\xi_1, \xi_2)$$

$$\xi_1 = \xi_1(t_0)e^{\lambda t} + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} f_1^*(\tau) d\tau \quad (\text{I})$$

$$\xi_2 = \xi_2(t_0)e^{-\lambda t} + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)} f_2^*(\tau) d\tau \quad (\text{II})$$

Veronderstel $||\xi|| \leq \delta \quad |f_1^*| \leq \varepsilon |\xi_1| \quad |f_2^*| \leq \varepsilon |\xi_2|$

Besch. II.

$$|\xi_2| \leq |\xi_2(t_0)| e^{-(\lambda-\varepsilon)(t-t_0)}$$

Kies $\varepsilon < \lambda$ en $||\xi(t_0)|| \leq \delta^* < \delta$

dan geldt $|\xi_2(t_1)| < |\xi_2(t_0)|$ voor $t_1 > t_0$

dus 0 kan geen limietpunt zijn voor $t \rightarrow -\infty$.

Besch. I.

Door in te voeren $t = -t^*$ volgt

$$\xi_1(-t^*) = \xi_1(-t_0^*)e^{-\lambda t^*} - \int_{t_0^*}^{t^*} e^{-\lambda(t^*-\tau^*)} f_1^*(-\tau^*) d\tau^*$$

en dus

$$|\xi_1(-t^*)| \leq |\xi_1(-t_0^*)| e^{-(\lambda-\varepsilon)(t^*-t_0^*)}$$

en uiteindelijk

$$|\xi_1(t)| \leq |\xi_1(t_0)| e^{(\lambda-\varepsilon)(t-t_0)}.$$

Kies $\varepsilon < \lambda$ en $||\xi(t_0)|| \leq \delta^* < \delta$

$$|\xi_1(t_1)| < |\xi_1(t_0)| \quad \text{voor } t_1 < t_0.$$

Dus 0 kan geen limietpunt zijn voor $t \rightarrow +\infty$.

Maar er kunnen gedegenerende gevallen voorkomen met $\xi_1(t_0) = 0$ of $\xi_2(t_0) = 0$.

Dus: Ook het zadelpunt wordt door gelineariseerde vergelijking juist weergegeven. In feite doen de enige moeilijkheden zich voor bij het centrum.

Centrum. Dit is het enige geval waarbij een gelineariseerde vergelijking een niet-limietpunt singulariteit heeft, terwijl niet-lineaire vergelijking een limietpunt kan hebben.

Voorbeeld.

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Gelineariseerd:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \text{constant, centrum.}$$

$$x_1 = r \cos \phi \quad x_2 = r \sin \phi.$$

$$\begin{array}{l} \frac{dr}{dt} \cos \phi - r \sin \phi \frac{d\phi}{dt} = -r \sin \phi - r^2 \cos \phi \\ \frac{dr}{dt} \sin \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = r \cos \phi - r^2 \sin \phi \end{array} \quad \left| \begin{array}{c|c} \cos \phi & \sin \phi \\ + & - \\ \sin \phi & \cos \phi \end{array} \right|$$

$$\frac{dr}{dt} = -r^2$$

$$r \frac{d\phi}{dt} = r$$

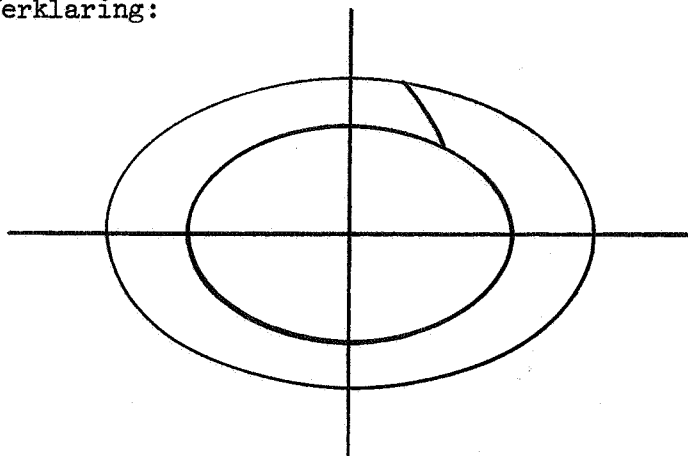
$$\frac{1}{r} = t + \frac{1}{r_0}$$

$$\phi = t + \text{const.}$$

$$r = (t + \frac{1}{r_0})^{-1}$$

} spiraalpunt

Verklaring:



Er is niet veel voor nodig om van een-
centrische cirkels een
spiraal te maken.

Er bestaan analytische criteria waarmee men in sommige gevallen kan beslissen of een centrum een spiraalpunt wordt of niet.

Wij zullen hier echter zonder bewijs vermelden:

Stelling. Als 0 een centrum is voor gelineariseerde vergelijkingen dan is 0 of een centrum of een spiraalpunt voor de niet-lineaire vergelijkingen.

Voorbeeld complete configuratie

Uiteraard kan een niet-lineaire differentiaalvergelijking meerdere singuliere punten bezitten. Voorbeeld:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \end{cases}$$

Singuliere punten: $x_2 = 0$ $x_1 = \pm 1$.

a) $x_1 = 1, x_2 = 0$ transf. $x_2 = \eta$ $x_1 - 1 = \xi$

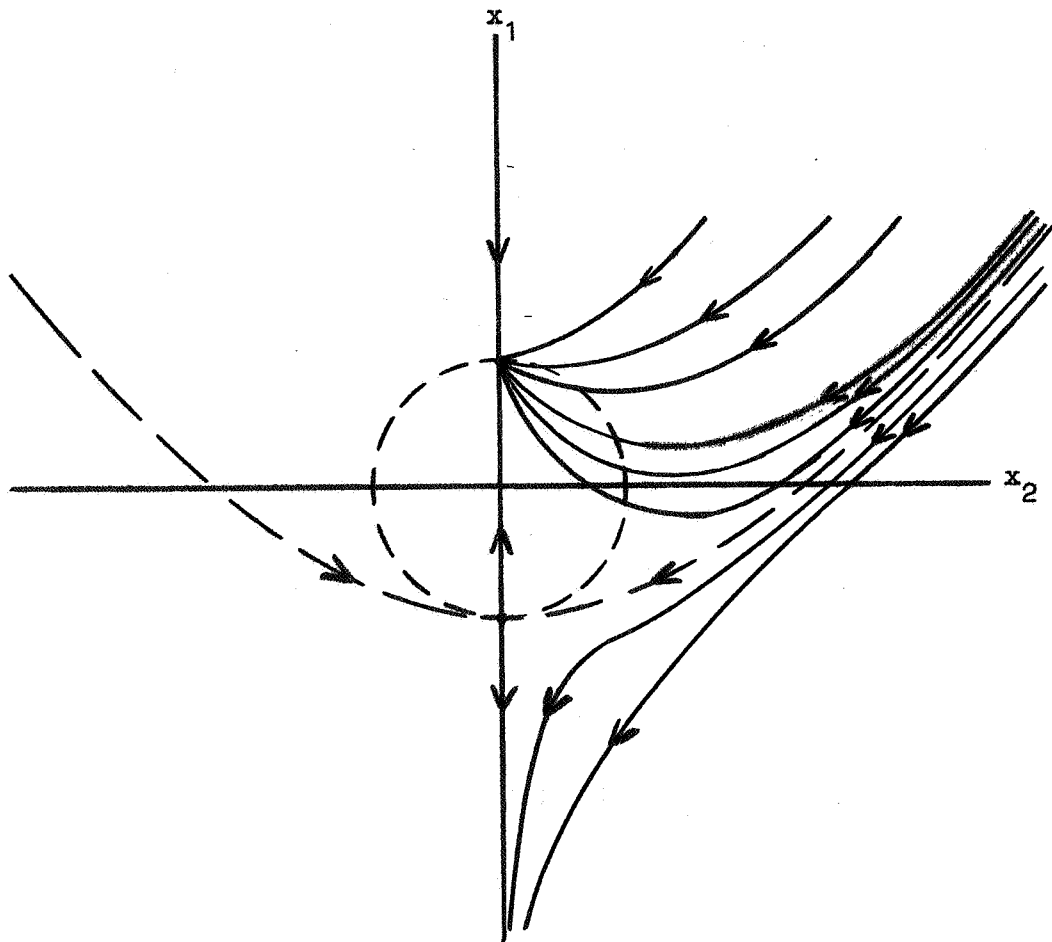
$$x_1^2 - 1 = (x_1 - 1)(x_1 + 1) = \xi(\xi + 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -2\xi - \xi^2 - \eta^2 \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\eta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{geass. lin. syst.} \\ &\lambda_1 = -2 \\ &\lambda_2 = -1 \\ &\text{Dus knooppunt (stabiel).} \end{aligned}$$

b) $x_1 = -1; x_2 = 0$ transf. $x_2 = \eta$ $x_1 + 1 = \xi$

$$x_1^2 - 1 = \xi(\xi - 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= +2\xi - \xi^2 - \eta^2 \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\eta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{geass. lin. syst.} \\ &\lambda_1 = +2 \\ &\lambda_2 = -1 \\ &\text{Dus zadelpunt.} \end{aligned}$$



Merk op $\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_2} = 0$ als $x_2^2 + x_1^2 = 1$ en $x_2 \neq 0$.

Meer algemeen: $\frac{dx_1}{dx_2} = c$ voor $1 - (x_1^2 + x_2^2) = cx_2$

d.w.z. $x_2^2 + (x_2 + \frac{1}{2}c)^2 = 1 + \frac{1}{4}c^2$.

Dit is de methode van de isoclinen.

—— is de separatrice.

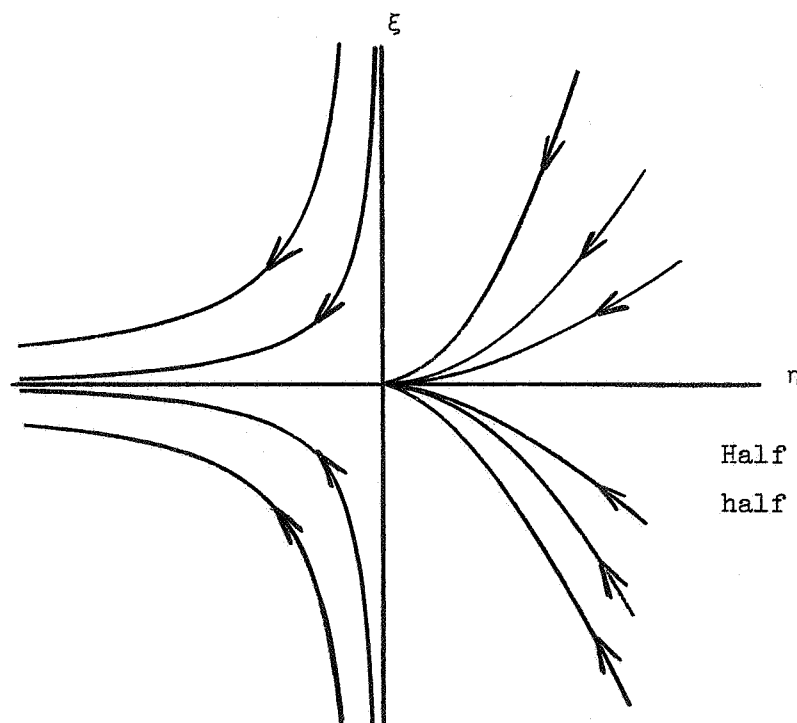
Voorbeeld hogere orde singulier punt

$$\frac{d\xi}{dt} = -\xi \quad \frac{d\eta}{dt} = -\eta^2$$

$$\xi = \xi_0 e^{-(t-t_0)} \quad \eta = \frac{\eta_0}{1 + \eta_0(t-t_0)}$$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\xi}{\eta^2} ; \quad \frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\eta}{\eta^2} ; \quad \ln \xi = -\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0} + \ln \xi_0$$

$$\xi = \xi_0 e^{-\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_0}\right)}$$



Half knooppunt
half zadelpunt

Merk op: als $\eta_0 = -|\eta_0|$

dan is voor $t - t_0 \rightarrow \frac{1}{|\eta_0|}$ $\eta \rightarrow -\infty$

en als $t - t_0 > \frac{1}{|\eta_0|}$ dan $\eta > 0$, dus:

"Snap" naar de rechterkant.

Dit merkwaardig gedrag ontstaat omdat een fysisch systeem wellicht de gedaante zou hebben

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta^2 - \alpha\eta^3 + \dots$$

dus bijv.:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta^2(1 + \alpha\eta) \quad \alpha > 0$$

en dan is $\eta = -\frac{1}{\alpha}$, $\xi = 0$ een stabiel limietpunt op de negatieve η -as waar de oplossing naar toe gaat. Als $|\alpha| \ll 1$ dan ligt dit punt ver links, maar mag nooit vergeten worden.

Andere singuliere punten

Singuliere punten op het oneindige hebben weinig praktische betekenis. Meeste differentiaalvergelijkingen representeren een mathematisch model, waarin eventueel x_i eindig (en vaak zelfs klein) zijn verondersteld.

Hoofdstuk III. Periodieke Oplossingen

Limietgedrag van $t \rightarrow +\infty$ behoeft niet door een singulier punt te worden gepresenteerd. Men kan ook periodieke oplossingen hebben.

Voorbeeld I.

$$\dot{x}_1 = x_2 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (1 - (x_1^2 + x_2^2))$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (1 - (x_1^2 + x_2^2))$$

$$x_1 = r \cos \phi; \quad x_2 = r \sin \phi.$$

$$\begin{array}{l} \frac{dr}{dt} \cos \phi - r \sin \phi \frac{d\phi}{dt} = r \sin \phi + \cos \phi (1 - r^2) \\ \frac{dr}{dt} \sin \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = -r \cos \phi + \sin \phi (1 - r^2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{cc} \cos \phi & \sin \phi \\ + & - \\ \sin \phi & \cos \phi \end{array} \right|$$

$$\frac{dr}{dt} = 1 - r^2 \qquad \frac{d\phi}{dt} = -1.$$

Merk op: gelineariseerd een spiraal om nulpunt. Dus niet-lineair ook.
Echter: wij kunnen exact integreren.

$$\phi = -t + \phi_0. \text{ De oplossing is periodiek,}$$

periode $T = 2\pi$.

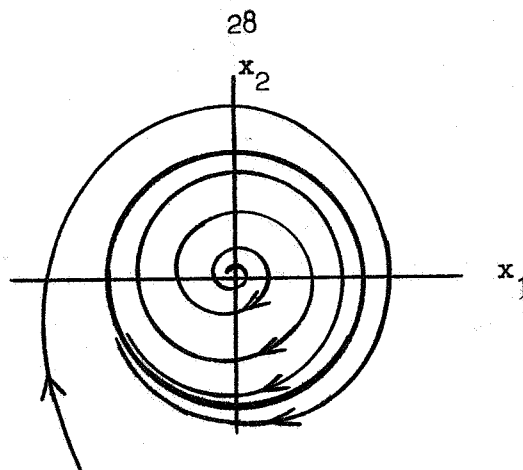
$$\frac{dr}{1-r^2} = dt \rightarrow \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+r}{1-r} \right| = t + c$$

$$\frac{1+r}{1-r} = c_0 e^{2t} \qquad r = \frac{c_0 e^{2t} - 1}{c_0 e^{2t} + 1}$$

$$r_0 = \frac{c_0 - 1}{c_0 + 1} \rightarrow c_0 = \frac{1+r_0}{1-r_0}.$$

$$r = \frac{(1+r_0) - (1-r_0)e^{-2t}}{(1+r_0) + (1-r_0)e^{-2t}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r = 1. \quad \underline{\text{Limit cycle, grenskringloop.}}$$



Merk op: eind-amplitude onafhankelijk van begincondities.

$$t \rightarrow \infty \quad \begin{aligned} x_1 &\rightarrow \cos t \\ x_2 &\rightarrow -\sin t. \end{aligned}$$

Dit is wezenlijk verschil met lineaire trillingen.

Voorbeeld van stabiele limit cycle, grenskringloop.

Voorbeeld II.

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1) \quad \frac{d\phi}{dt} = -1.$$

Wij kunnen uiteraard exact integreren, maar ook zonder dat:

$r = r_0 = 1$ is een oplossing (limit cycle).

$$\frac{dr}{dt} > 0 \quad \text{voor} \quad r > 1; \quad \frac{dr}{dt} < 0 \quad \text{voor} \quad r < 1.$$

Dus instabiele periodieke oplossing (spiraal pijltje omdraaien).

Voorbeeld III.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$

$$\frac{dr}{dt} = r^2(r^2 - 1)^2; \quad \frac{d\phi}{dt} = -1.$$

$r = r_0 = 1$ is een oplossing.

$$\frac{dr}{dt} > 0 \quad \text{voor} \quad r > 1 \quad \text{en} \quad r < 1.$$

Semi-stabiele periodieke oplossing

Voorbeeld IV.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1)x_1 \sin\left(\frac{4}{x_1^2 + x_2^2 - 1}\right)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2 \sin\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}\right)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -1.$$

$$\frac{dr}{dt} = \mu r(r^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right).$$

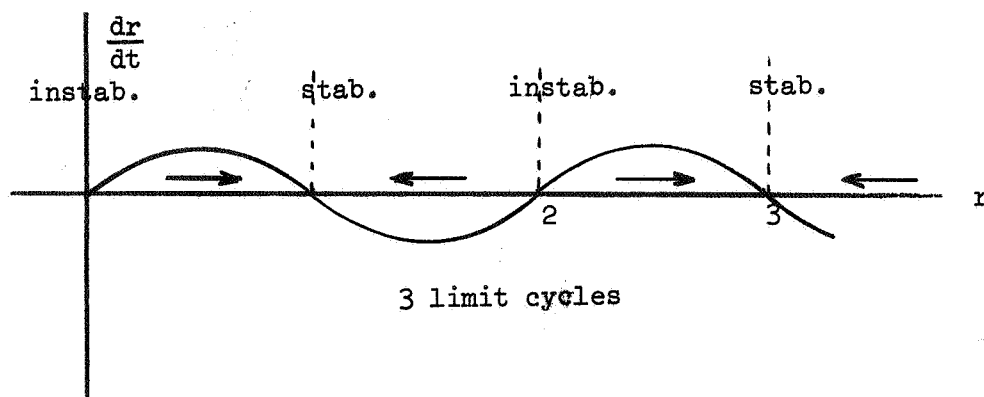
Dus: Limit cycles voor $\frac{1}{r^2 - 1} = n\pi$ $r_n^2 = 1 + \frac{1}{n\pi}$ om de beurt

stabiel en instabiel (enigszins ziekelijk voorbeeld).

Voorbeeld V.

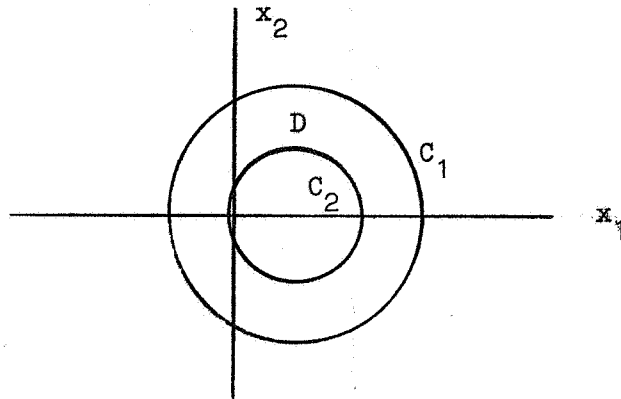
$$\frac{d\phi}{dt} = -1; \quad \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)(2^2 - r^2)(3^2 - r^2).$$

Drie periodieke oplossingen



Hoofdstuk IV. Existentie stellingen, Limit cycles

Theorie van Poincaré-Bendixson.



Laat gegeven zijn een gesloten ring-vormig gebied D , begrensd door twee gesloten krommen C_1 en C_2 , zodanig dat binnen D zich geen singulier punt bevindt.

Als alle baankrommen die C_1 en C_2 snijden met toenemende (of met afnemende) t gebied D binnenkomen, dan bevat D een limit cycle.

Aanschouwelijk is dit zonder meer duidelijk: de baankromme kan nergens naar toe. Maar er zou nog een random beweging binnen D mogelijk zijn.

Dit is een praktische formulering. De abstracte komt later.

Voor het bewijs is het nodig eerst een stuk theorie te ontwikkelen.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1 \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2.$$

Definitie. Halve baankromme C^+ : verzameling punten $P(t)$ van x_1, x_2 -vlak zodanig dat hun coördinaten ϕ_1, ϕ_2 oplossingen zijn van de vergelijking voor $t \geq t_0$.

Halve baankromme C^- : analoog gedefiniëerd voor $t \leq t_0$.

Limietpunt: Q is een limietpunt van C^+ als er een rij reële getallen t_n bestaat met $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ zodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(t_n) = Q.$$

Analoog voor limietpunt van C^- .

Verzameling van alle limietpunten van C^+ is $L(C^+)$, die van C^- is $L(C^-)$.

Complete baankromme: vereniging van C^+ en C^- .

Laat D een open, begrensde verzameling van x_1, x_2 zijn, zodanig dat oplossingen van vergelijkingen $\phi_i(t, \xi_i)$ continu zijn t.a.v. t en van de beginvoorwaarde ξ_1, ξ_2 , mits $\xi_i \in D$. Bestaan van zulk gebied volgt uit existentie- en eenduidigheidsstellingen.

Stelling I. Als C^+ bevat is in een gesloten subset K van D , dan is $L(C^+)$

- 1) niet leeg
- 2) gesloten
- 3) samenhangend.

Bewijs. 1) Daar alle punten van C^+ tot een begrensde verzameling K behoren, kan men altijd een rij $t_n \rightarrow \infty$ construeren, zodanig dat $P(t_n)$ in K blijft en convergeert naar een punt van K (daar K gesloten is). Dus $L(C^+)$ is niet leeg.

Bolzano-Weierstrass.

Voer in een rij t_n met eigenschap $t_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$. $\{P(t_n)\}$ is begrensde oneindige verzameling, en bevat dus een convergerende oneindige rij.

Rest te bewijzen, dat deze convergerende rij de eigenschap bezit, dat $t_m \rightarrow \infty$ voor $m \rightarrow \infty$.

Neem een willekeurig voorschrift $n \rightarrow m$. Zij Q het limietpunt, dan

$$d[P(t_m), Q] < \epsilon \quad m > M$$

(d afstand).

Als de kromme zichzelf één keer of oneindig vaak snijdt, kan men vanaf het laatste snijpunt redeneren.

Werkelijk uitgesloten is, dat de kromme zichzelf oneindig vele keren snijdt.

Als geen van de snijpunten oneindig vaak optreedt voor $t \rightarrow \infty$, dan nemen we $t > t_0^*$, waarbij t_0^* een moment is, waarna geen snijpunten meer optreden.

Voor eindige n_1, n_2 kan nu $d[P(t_{n_1}), P(t_{n_2})]$ niet meer willekeurig klein worden (dan immers weer een snijpunt).

Bijgevolg kan de t_m -rij niet worden opgebouwd uit $t_n, n \leq N$ eindig (kenmerk van Cauchy zou niet opgaan). t_m -rij is dus opgebouwd uit aftelbaar oneindig veel elementen van t_n -rij

$$d[P(t_{m_1}), P(t_{m_2})] < \varepsilon \quad m_1, m_2 > M.$$

Daar wederom voor eindige tijden d niet willekeurig klein kan worden gemaakt, moet gelden: $t_m \rightarrow \infty$ voor $m \rightarrow \infty$.

2) Te bewijzen: ieder verdichtingspunt van $L(C^+)$ behoort tot $L(C^+)$.

Zij Q een verdichtingspunt, d.w.z. $Q_n \in L(C^+), n = 0, 1, \dots$ zodanig dat $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$, d.w.z. $d[Q_n, Q] \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Nu bestaat er voor elke $\varepsilon > 0$ een getal $N > 0$ zodanig dat $d[P(t_n), Q_n] < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $n > N$, want Q_n is een limietpunt van $P(t)$.

Wij kunnen N zodanig kiezen dat tevens

$$d[Q_n, Q] < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{als } n > N.$$

Maar dan

$$d[P(t_n), Q] < \varepsilon \quad \text{als } n > N. \text{ D.w.z. } P(t_n) \rightarrow Q. \text{ D.w.z. } Q \in L(C^+).$$

3) Men redeneert uit het ongerijmde.

Stel dat er bestaan twee onsamenvallende gesloten verzamelingen M en N , zodanig dat $L(C^+) = M \cup N$.

Daar M en N begrensd zijn en gesloten, liggen zij op een afstand δ van elkaar.

Beide verzamelingen M en N bevatten punten van $L(C^+)$. Dus:

Er bestaan willekeurig grote waarden van t zodanig dat $d[P(t), M] < \frac{\delta}{2}$ (als $P(t)$ naar een punt van M convergeert),
en willekeurig grote waarden van t zodanig dat $d[P(t), M] > \frac{\delta}{2}$ (als $P(t)$ naar een punt van N convergeert).

Maar dan kunnen wij een rij $t_n \rightarrow \infty$ construeren zodanig dat

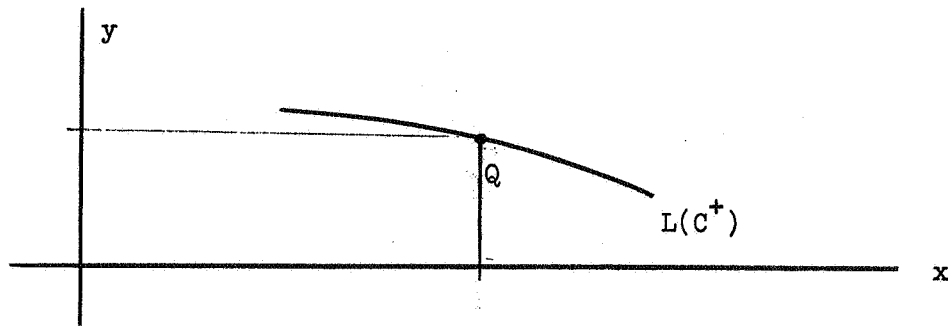
$$d[P(t_n), M] = \delta/2 \text{ voor alle } n.$$

Deze rij $P(t_n)$ is begrensd, wij kunnen dus een convergente subrij maken $P(t_n) \rightarrow Q$.

$$d(Q, M) = \frac{\delta}{2}.$$

Maar $Q \in L(C^+)$ en behoort noch tot M noch tot N: Contradictie!

Stelling II. Als C^+ bevat is in een gesloten deelverzameling van D en $L(C^+)$ bevat een regulier punt Q, dan bestaat de baankromme C_Q door Q als complete baankromme en $C_Q \subset L(C^+)$.



Zij C^+ gegeven door

$$x = \phi(t; \xi, \eta); \quad y = \psi(t; \xi, \eta)$$

$$\xi = \phi(t_0; \xi, \eta); \quad \eta = \psi(t_0; \xi, \eta)$$

Er bestaat een rij t_n zodanig dat

$$\xi_n = \phi(t_n; \xi, \eta); \quad \eta_n = \psi(t_n; \xi, \eta)$$

$$\xi_n \rightarrow x_Q \quad \eta_n \rightarrow y_Q \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Zij nu C_Q gedefiniëerd door

$$\xi = \phi(t'; x_Q, y_Q); \quad \eta = \psi(t'; x_Q, y_Q)$$

gedefiniëerd voor $0 \leq t' \leq \tau$ zodanig dat ξ en η binnen de compacte deelverzameling van D blijft.

Beschouw nu $x = \phi(t' + t_n; \xi, \eta) = \phi(t'; \xi_n, \eta_n)$
 $y = \psi(t' + t_n; \xi, \eta) = \psi(t'; \xi_n, \eta_n)$

Voor een vaste t' gaan ϕ, ψ naar een punt van $L(C^+)$, want deze is de volledige verzameling van limietpunten.

Maar anderzijds
$$\left. \begin{aligned} \phi(t'; \xi_n, \eta_n) &\rightarrow \phi(t'; x_Q, y_Q) \\ \psi(t'; \xi_n, \eta_n) &\rightarrow \psi(t'; x_Q, y_Q) \end{aligned} \right\} \text{ als } n \rightarrow \infty$$

Deze limiet bestaat voor voldoende kleine t' en $\xi, \eta \in L(C^+)$.

Men kan nu voortzetten met de standaard procedure in positieve en negatieve t' -richting (telkens bij intervallen) waaruit het beweerde volgt.

Stelling van Poincaré-Bendixson. (Coddington & Levinson)

Laat C^+ bevat zijn in een gesloten deelverzameling van D . Als $L(C^+)$ geen singuliere punten bevat dan is:

- 1) of $C^+ = L(C^+)$ een periodieke baankromme;
- 2) of $L(C^+)$ is een periodieke baankromme.

Onder periodieke baankromme verstaan wij een puntverzameling zodanig dat er voor elk punt een rij $t_n \rightarrow \infty$ bestaat zodanig dat

$$P(t_1) = P(t_2) = P(t_3) = \dots = P(t_n).$$

Een periodieke baankromme is dan ook noodzakelijk een verzameling van limietpunten.

Hieruit volgt onmiddellijk de eerder gegeven versie van de stelling. Voor bewijs hebben wij nog nodig een aantal nieuwe begrippen en een aantal lemma's.

Definitie. Beschouw vector f met componenten f_1, f_2 . $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1}{f_2}$.

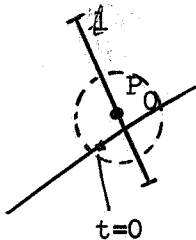
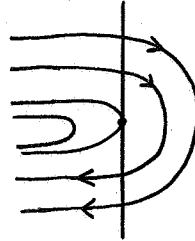
Aldus definiëert f in elk punt (x_1, x_2) een richting.

Een gesloten recht lijnstuk l noemen we een transversaal als l geen singuliere punten bevat en de richting ervan niet samenvalt met die van f .

Eigenschappen. a) elk punt van D is een inwendig punt van een transversal.

b) iedere baankromme, die een transversaal ontmoet, snijdt deze, en alle doen dit in dezelfde richting.

Als er omkering van richting plaats zou vinden, dan zou één baankromme de transversaal raken! Dit is dan tegen de afspraak. Voorbeeld:



c) neem $P_0 \in l$ als inwendig punt. Voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een cirkel C_ε met P_0 als middelpunt, zodanig dat een baankromme, die op $t = 0$ door een punt binnen C_ε gaat, l snijdt op t met $|t| < \varepsilon$.

Lemma I. Als een eindige gesloten boog A van baankromme C de transversaal l snijdt, dan is het aantal snijpunten eindig en de volgorde op A is dezelfde als op l . Als C periodiek is dan is er ten hoogste één snijpunt. (En vice versa: als er maar één snijpunt is in elk punt van de baankromme, dan is de kromme periodiek).

Bewijs. 1) eindig aantal snijpunten.

Boog A : $P(t)$ met coördinaten $\phi_1(t), \phi_2(t), t^* \leq t \leq t^{**}$ eindig. Stel aantal snijpunten $P_n = P(t_n)$ oneindig. Dan kunnen wij een rij vormen $t_n \rightarrow \hat{t}$ als $n \rightarrow \infty, t^* \leq \hat{t} \leq t^{**}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_1(t_n) - \phi_1(\hat{t})}{t_n - \hat{t}} = (f_1(\phi_1, \phi_2))_{t=\hat{t}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_2(t_n) - \phi_2(\bar{t})}{t_n - \bar{t}} = (f_2(\phi_1, \phi_2))_{t=\bar{t}}$$

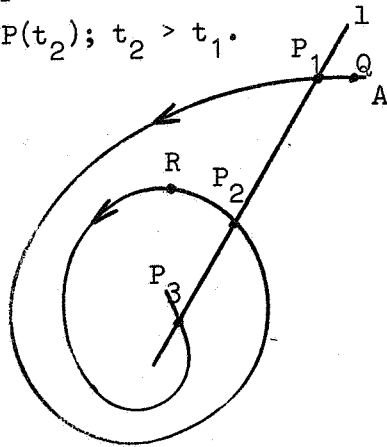
zodat ook

$$\frac{\phi_1(t_n) - \phi_1(\bar{t})}{\phi_2(t_n) - \phi_2(\bar{t})} \rightarrow \left| \frac{f_1}{f_2} \right|_{t=\bar{t}}.$$

Maar links staat de constante richting van de transversaal l , die per definitie ongelijk is aan de richting van f . Dus een contradictie!

2) Volgorde van snijpunten.

$$P_1 = P(t_1); P_2 = P(t_2); t_2 > t_1.$$



$\widehat{P_1 P_2}$ boog op A ; $\overline{P_1 P_2}$ lijnstuk van l .

$J = \overline{P_1 P_2} + \widehat{P_1 P_2}$ is een (Jordan) kromme ^{*)} die het stuk in twee gebieden deelt.

Q op A voor $t < t_1$ en R op A voor $t > t_2$ liggen ter weerszijden van J . Stel dat C voor $t > t_2$ buiten J zou komen, dan zou deze of $\widehat{P_1 P_2}$ snijden in strijd met eenduidigheid, of $\overline{P_1 P_2}$ snijden in verkeerde richting (zie eig. b). Dus C blijft binnen J van $t > t_2$ en bijgevolg is volgende snijpunt op l zodanig dat P_2 tussen P_1 en P_3 .

^{*)} Jordan kromme is topologisch beeld van de cirkel. Jordan Theorema:
 J op x_1, x_2 -vlak π . Complement van J is $\pi - J$, is de vereniging van twee onsamenvallende openverzamelingen S_i en S_e , beide begrensd door J .
 S_i = interieur van J , is begrensd, S_e = exterieur van J , is onbegrensd.

3) Periodiek gev. Als P_1 en P_2 samenvallen dan is duidelijk C periodiek. Stel dat C periodiek is en P_1, P_2 vallen niet samen. Dan zou de boog van R naar Q terug moeten door J te snijden, en dat kan niet, zoals bewezen is. Dus P_1 en P_2 moeten samenvallen.

Lemma II. Als C^+ en $L(C^+)$ (welke uitsluitend niet-singuliere punten bevat) een gemeenschappelijk punt hebben, dan is C^+ periodiek. (Zij maakt deel uit van $L(C^+)$, zie opm. op blz. 34).

Bew. Laat $P_1 = P(t_1)$ gemeenschappelijk punt van C^+ en $L(C^+)$ zijn. Dit is een regulier punt, dus er bestaat een transversaal l door P_1 ; P_1 is een inwendig punt van l . Wij gebruiken nu eig. c). Neem een cirkel met P_1 als middelpunt ($\epsilon = 1$). Laat bijv. voor $\hat{t} > t_1 + 2$, $Q = P(\hat{t})$ binnen de cirkel liggen. Dan zal er een $\tilde{t}$ bestaan, $|\tilde{t} - \hat{t}| < 1$, zodanig dat $\hat{P} = P(\hat{t})$ een snijpunt van l en C^+ zal zijn. Stel nu $\hat{P}$ niet samenvallend met P_1 , dan zou boog $\widehat{PP_1}$ l in een eindig aantal punten snijden en de snijpunten zullen zich van P_1 verwijderen (lemma I, 2)). Maar dan is P_1 geen limietpunt van C^+ en ligt niet op $L(C^+)$. Dus C^+ en l kunnen maar één snijpunt hebben en bijgevolg is C^+ periodiek.

Opm. Op dezelfde wijze toont men aan dat transversaal $L(C^+)$ in slechts één punt kan snijden.

Lemma III. Als $L(C^+)$ (welke uit reguliere punten bestaat) een periodieke baankromme bevat, dan is $L(C^+)$ met deze baankromme identiek.

Bew. Laat C_0 de periodieke baankromme zijn. Stel

$$L(C^+) - C_0 \text{ is niet leeg.}$$

Daar $L(C^+)$ samenhangend is (st. I, 3)), bevat C_0 een verdichtingspunt van $L(C^+) - C_0$. Laat deze Q_0 zijn, en neem transversaal l door Q_0 . Uit eigenschap 3) volgt dat baankromme C_0 door Q voldoende dichtbij Q_0 l zal snijden. Uit St. II volgt, dat C_0 een limietkromme is.

C_Q is verschillend van C_0 , want zij behoort tot $L(C^+) - C_0$. Maar nu zou l twee snijpunten met $L(C^+)$ hebben (namelijk Q_0 en snijpunt met C_Q). Dus contradictie in het licht van de opmerking hierboven.

Bewijs stelling Poincaré-Bendixson.

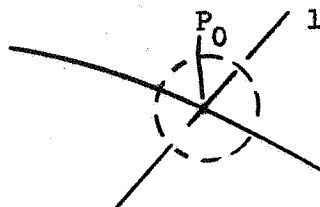
Beschouw een gesloten gebied, dat geen singuliere punten bevat, waarin C^+ ligt. Dan bestaat (st. I) $L(C^+)$, niet leeg, gesloten en samenhangend.

Als C^+ periodiek is (dan is zij een deel van $L(C^+)$), dan is $L(C^+)$ periodiek t.g.v. lemma III.

Beschouw nu C^+ niet periodiek. Er bestaat nu (stelling II) een volledige baankromme $C_0 \subset L(C^+) \subset K$. Beschouw C_0^+ . Een limietpunt P_0 van C_0^+ moet noodzakelijk $\in L(C^+)$, want $L(C^+)$ is een gesloten verzameling. Laat l transversaal door P_0 zijn. Deze snijdt $L(C^+)$ slechts in P_0 (opm. bij lemma II), en tevens C_0^+ in P_0 .

Immers:

1) l snijdt C_0^+ :



P_0 is een limietpunt van C_0^+ , dus willekeurige ϵ -omgeving van P_0 bevat punten van C_0^+ .

T.g.v. eig. c) van de transversalen moet C_0^+ l snijden.

2) l snijdt C_0^+ in P_0 :

$$C_0^+ \subset L(C^+)$$

en $L(C^+)$ wordt slechts in P_0 gesneden.

3) Nu is $P_0 \in L(C_0^+) \subset L(C^+)$. C_0^+ en $L(C_0^+)$ hebben een punt gemeen. Dus C_0^+ is periodiek. T.g.v. lemma III is $L(C_0^+)$ periodiek en opnieuw via lemma III is $L(C^+)$ periodiek.

Dus C_0^+ en $L(C_0^+)$ hebben een gemeenschappelijk punt (P_0). T.g.v. lemma II is C_0^+ periodiek en t.g.v. lemma III is $L(C^+) = C_0^+$.

Practische toepassingen.

De moeilijkheid is een gebied D van reguliere punten te construeren zodanig dat alle baankrommen naar binnen (of naar buiten) gaan.

Vergelijking van Liénard.

Constructie van Stoker.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Schrijf: $\frac{dx}{dt} = v$; $\frac{dv}{dt} = f(v) - x$.

Deze formulering is meer algemeen dan men zou denken.

Beschouw:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g(z) \frac{dz}{dt} + z = 0$$

zoals bijv. verg. v.d. Pol $g(z) = \mu(z^2 - 1)$.

Schrijf nu

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dz}{dt} + G(z) \right] + z = 0$$

$$\frac{dG}{dz} = g(z).$$

Stel nu

$$\frac{dz}{dt} + G(z) = -x$$

$$\frac{dx}{dt} = z.$$

Wij hebben dan het systeem van Liénard.

Stel: $f(v)$ cont. afg. t.o.v. v en voorts

$$f(v) = g(v) - \alpha v \quad \alpha = \text{pos. const.}$$

$$\frac{dg}{dv} > 0; \left(\frac{dg}{dv} \right)_{v=0} > \alpha; g(-v) = -g(v)$$

$$|g(v)| < c \quad c = \text{constante.}$$

Singulier punt: $x = 0$ en $v = 0$ ($g(0) = 0$)

Wij gaan construeren: C_1 en C_2 om oorsprong zodanig dat de richting van de vector $(v, f(v) - x)$ naar binnen toe is gericht.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - x}{v} \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

Analyse van de singulariteit:

$$\left(\frac{df}{dv} \right)_{v=0} > 0 \text{ bestaat, laat } \left(\frac{df}{dv} \right)_{v=0} = \beta > 0 \text{ en beschouw } f^* = f - \beta v,$$

dan bestaat

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f^*}{v} = 0 \quad (\text{dit is immers } \left(\frac{df^*}{dv} \right)_{v=0} = 0).$$

Dus gelineariseerd systeem is:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= v_0; \quad \frac{dv_0}{dt} = \beta v_0 - x_0. \\ x_0 &= A e^{\frac{1}{2}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4})t} + B e^{\frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4})t}. \end{aligned}$$

Dus oorsprong is een limietpunt voor $t \rightarrow -\infty$ voor gelineariseerd systeem en bijgevolg (zie stellingen) ook voor niet-lineair systeem.

Dus er bestaat een $r_0 > 0$ zodanig dat de kromme

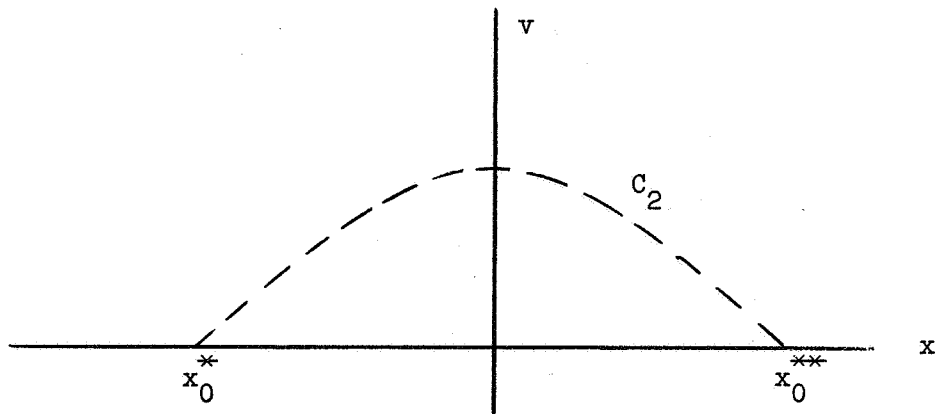
$$x^2 + v^2 = r^2 \quad r < r_0$$

door alle baankrommen wordt gesneden, en wel van binnen naar buiten toe. Elk van deze cirkels kan dienen als C_1 .

Nu C_2 : symmetrie-overwegingen: stel $v = -\bar{v}$; $x = -\bar{x}$; $f(-\bar{v}) = -f(\bar{v})$ dus er volgt

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}; \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = f(v) - \bar{x} \quad (\text{invariantie}).$$

Dus baankrommen voor $v < 0$ kunnen worden verkregen uit baankrommen van $v > 0$ door spiegeling.



Stel dat wij voor $v > 0$ een kromme hebben geconstrueerd zodanig dat alle baankrommen naar binnen toe gaan, en voorts $x_0^{**} = -x_0^*$. Dan kunnen wij spiegelen volgens $x = -\bar{x}$, $v = -\bar{v}$ en verkrijgen een kromme voor $v < 0$ met dezelfde eigenschap.

Dus het is voldoende het geval $v > 0$ te beschouwen.

$$v > 0: \quad \frac{dx}{dt} > 0 \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - x}{v} < \frac{c - av - x}{v} .$$

Dus alle baankrommen zullen, naar binnen toe gaand, snijden de integraal-kromme van

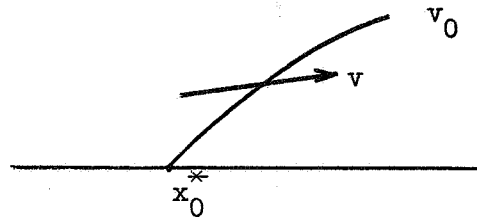
$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{c - av_0 - x}{v_0} .$$

Immers v_0 is een transversaal, dus alle baankrommen snijden v_0 in dezelfde richting.

Het naar binnen toe gaan volgt uit

$$\frac{dv}{dx} < \frac{dv_0}{dx} \quad ; \quad \frac{dv}{dx} > 0 .$$

Beschouw omgeving van $x = x_0^*$, dat is een extreem punt want $\frac{dv_0}{dx} = \infty$, alleen als $v_0 \rightarrow 0$. Volgt:



Wij veronderstellen nu $\alpha < 2$ en voeren in $q^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$.

Elementaire integratie levert op

$$v_0 = -Ae^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin qt$$

$$x = c + Ae^{-\frac{\alpha}{2}t} \left(\frac{\alpha}{2} \sin qt + q \cos qt \right)$$

waarbij A een nog vrije integratieconstante is, terwijl willekeurig is gesteld $v_0 = 0$ voor $t = 0$.

Immers, in parametervorm:

$$v_0 = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \alpha \frac{dx}{dt} - c = 0$$

$$x - c = \xi \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha \frac{d\xi}{dt} + \xi = 0$$

$$\xi = e^{\lambda_{1,2} t}$$

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}).$$

Laat nu $-\frac{\pi}{q} \leq t \leq 0$. Dan is $v_0 \geq 0$ als $A > 0$ en er volgt

$$x_0^* = c - Aqe^{\frac{\alpha\pi}{2q}} \quad x_0^{**} = c + Aq.$$

Stel nu

$$x_0^* = -x_0^{**} \quad \text{d.w.z.}$$

$$c - Aqe^{\frac{\alpha\pi}{2q}} = -c - Aq$$

$$A = \frac{1}{q} \frac{2c}{\left[e^{\frac{\alpha\pi}{2q}} - 1 \right]} > 0.$$

Dus de constructie is voltooid. Door spiegeling volgt C_2 voor $v < 0$.
Hiermee is het bestaan van limit cycle bewezen.

Opm. Er is een uitvoerige literatuur met varianten en toepassingen van dit type ex. stell. en constructies. Zie voor overzicht Cesari: "Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations", Springer.

Stelling van Dragilev-Ivanov.

Laat $\frac{dx}{dt} = v$; $\frac{dv}{dt} = -f(x)v - g(x)$.

Als: 1) $xg(x) > 0$ voor $x \neq 0$

$$\int_0^{\infty} g \, dx = \infty.$$

2) $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ is een eenwaardige functie voor $-\infty < x < +\infty$,

Lipschitz continu en voorts zodanig dat $xF(x) < 0$ voor $x \neq 0$ en $|x|$ voldoende klein.

3) Er bestaan constanten N, K, K' ($K' < K$) zodanig dat

$$F(x) \geq K \text{ voor } x > N; \quad F(x) \leq K' \text{ voor } x < -N.$$

Dan bestaat er op zijn minst één limit cycle.

Bewijs bijv. in Nemytskii en Stepanov: "Qualitative theory of Differential Equations", Princeton, p. 141.

Stelling van Levinson-Smith.

1) als hierboven, bovendien Lipschitz continu.

2) als hierboven, maar:

$f(x)$ even functie van x zodanig dat

$$F(x) < 0 \text{ voor } 0 < x < x_0$$

$F(x) > 0$ en monotoon stijgend voor $x > x_0$.

3) kan nu vervallen.

Dan bestaat er één en slechts één periodieke oplossing.

Bew. bijv. in Nemytskii en Stepanov, als uitbreiding van st. Dr.-Iv.

Toepassing. Vergelijking van van der Pol.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = \mu(1 - x^2)v - x.$$

Dus: $g(x) = x$; $f(x) = -\mu(1 - x^2)$

$$f(x) = -\mu\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$$

$g(x)$ voldoet evident aan de eisen.

$$F(x) = -\mu x\left(1 - \frac{1}{3}x^3\right) < 0 \quad \text{voor } x < x_0 = \sqrt{3}$$

$$> 0 \quad \text{voor } x > \sqrt{3}$$

en monotoon stijgend.

Bijg.: De vergelijking van van der Pol bezit één en slechts één periodieke oplossing.

Hoofdstuk V. Stabiliteit

Inleiding. Permanente oplossingen $\rightarrow$ limietpunten of limietkrommen,
d.w.z. singuliere limietpunten (stationaire)
limit cycles (periodieke oplossingen).

Probleemstelling: a) gegeven beginvoorwaarden "dichtbij" een limiet-oplossing. Gaat de oplossing naar de limiet-oplossing?

b) Gegeven systeem in statisch of dynamisch evenwicht (permanente oplossing). Maar stoort het systeem. Gaat het terug naar evenwicht?

a) en b) nagenoeg equivalent. Bij studie van singuliere punten in X^2 hebben wij reeds de stabiliteit bestudeerd: stabiele en instabiele limietpunten, knooppunten en spiraalpunten.

Nu meer algemeen.

Definitie. $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + f_i(x_1, \dots, x_n, t), i = 1, 2, \dots, n.$

Opm.: a_{ij} kunnen functies van t zijn.

In vectorvorm

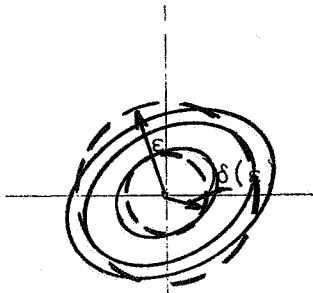
$$\frac{dX}{dt} = AX + f(X, t).$$

A is een matrix van n -de orde. f zijn niet-lineaire termen.

$$\left. \begin{aligned} ||X|| &= \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{||f(X, t)||}{||X||} = 0. \\ \text{Dit is equivalent met: } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|f_i(x_1, \dots, x_n, t)|}{||X||} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ voor } t \geq 0.$$

Def. stabiliteit. Oplossing $X^{(0)}$ is stabiel als voor alle $\varepsilon > 0$ er een $\delta(\varepsilon) > 0$ bestaat, zodanig dat indien een andere oplossing $\tilde{X}$ voor $t = t_0$ voldoet aan

$$||X^{(0)} - \tilde{X}|| \leq \delta \quad (X^{(0)} \neq \tilde{X})$$



er geldt

$$||X^{(0)} - \tilde{X}|| \leq \varepsilon \quad \text{voor } t > t_0.$$

Dit is stabiliteit in de zin van Liapounoff.

Indien initiëel verschil klein, dan blijft deze klein.

Opm.: evident $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Als geldt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||X^{(0)} - \tilde{X}|| = 0$$

dan spreken wij van asymptotische stabiliteit.

Stabiliteit van baankrommen (orbitale stabiliteit).

Zij C een baankromme. Indien er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon)$ bestaat, zodanig dat gegeven

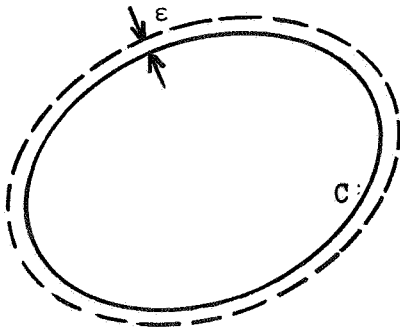
$$d[X(t), C] \leq \delta(\varepsilon) \quad \text{voor } t = t_0$$

geldt

$$d[X(t), C] \leq \varepsilon \quad \text{voor } t > t_0$$

dan is C stabiel.

Opm.:



Orbitale stabiliteit gaat over in stabiliteit in de zin van Liapounoff, indien de bewegingen synchroon zijn.

In alle andere gevallen instabiliteit.

Voorbeelden: Centrum is stabiel in de zin van Liapounoff.

Stabiel spiraal- of knooppunt is asymptotisch stabiel.

Overzicht van de problematiek.

Problemen: I. Stabiliteit van stationaire oplossingen (singuliere punten).

II. Stabiliteit van periodieke oplossingen (limit cycles).

Methoden: A. Storingsrekening (locale analyse)

B. Directe methode van Liapounoff (globale analyse).

Problematiek I A. Door eenvoudige transformatie kan singulier punt in de oorsprong worden geplaatst.

Zij dus $X^{(0)} = 0$. Zij voorts $\delta \ll 1$. Dan zijn, althans initiëel, de niet-lineaire termen klein t.o.v. lineaire termen.

Gelineariseerde vergelijking:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum c_{ij}(t)x_j$$

a) analyse van gedrag voor $t \rightarrow \infty$ van oplossing van gelineariseerde vergelijking.

b) theorie, die in staat stelt uit a) conclusies te trekken t.a.v. gedrag voor $t \rightarrow \infty$ van oplossing van niet-lineaire vergelijking. (Vergelijk de studie van singuliere punten in X^2 .)

Problematiek II A. Zij $X^{(0)}(t)$ een periodieke oplossing.

Schrijf

$$X(t) = X^{(0)}(t) + \tilde{X}(t)$$

$\tilde{X}(t)$ heet stortingsterm.

$$||\tilde{X}|| = ||X(t) - X^{(0)}(t)|| \ll 1 \text{ althans initiëel.}$$

$$\frac{dX^{(0)}}{dt} + \frac{d\tilde{X}}{dt} = AX^{(0)} + A\tilde{X} + f(X^{(0)} + \tilde{X}, t)$$

$$\frac{dX^{(0)}}{dt} = AX^{(0)} + f(X^{(0)}, t)$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = A\tilde{X} + [f(X^{(0)} + \tilde{X}, t) - f(X^{(0)}, t)]$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{A}(t)\tilde{X} + f^*(\tilde{X}, X^{(0)}, t) \quad (f^* \text{ niet-lineair}).$$

Gelineariseerde vergelijking:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{A}(t)\tilde{X} \quad (\tilde{A}(t) \text{ zal in het algemeen periodiek zijn}).$$

- a) onderzoek gelineariseerde vergelijking.
- b) theorie van niet-lineaire vergelijkingen.

Voorbeeld storingsrekening.

Verg.v.v.d. Pol.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1$$

Zij $X^{(0)}(t)$ de periodieke oplossing.

$$X(t) = X^{(0)}(t) + \tilde{X}(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= \tilde{x}_2; \quad \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \mu(1 - (x_1^{(0)} + \tilde{x}_1)^2)(x_2^{(0)} + \tilde{x}_2) - \tilde{x}_1 \\ &\quad - \mu(1 - x_1^{(0)2})(x_2^{(0)}) \\ &= \mu(1 - x_1^{(0)2} - 2x_1^{(0)}\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^2)(x_2^{(0)} + \tilde{x}_2) \\ &\quad - \mu(1 - x_1^{(0)2})x_2^{(0)} - \tilde{x}_1. \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \mu\{-(2x_1^{(0)}\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2)x_2^{(0)} + (1 - x_1^{(0)2} - 2x_1^{(0)}\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^2)\tilde{x}_2\} - \tilde{x}_1.$$

Gelineariseerde vergelijking:

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \mu \{-2x_1^{(0)}(t)x_2^{(0)}(t)\tilde{x}_1 + (1-x_1^{(0)2}(t))\tilde{x}_2\} - \tilde{x}_1.$$

Opm. Er zijn betere methoden voor verg.v.v.d. Pol. Dit is slechts een illustratie van de storingsrekening.

Problematiek I B en II B.

De directe methode van Liapounoff berust op de constructie van een functie $V(x_1, x_2, t)$, die globaal iets zegt over gedrag van het systeem. Later zullen wij dit uitvoerig behandelen. Wij geven hier slechts een voorbeeld.

Voorb.
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad \frac{dV}{dt} = 2V(2V - 1)$$

$$V \geq 0 \quad \frac{dV}{dt} > 0 \text{ als } V > \frac{1}{2}$$

$$\frac{dV}{dt} < 0 \text{ als } V < \frac{1}{2}.$$

Stabiliteit als $V < \frac{1}{2}$, instabiliteit als $V > \frac{1}{2}$.

Later: algemene stellingen en voorbeelden van constructie in minder triviale gevallen.

Plan de campagne.

- 1) Asymptotisch gedrag van lineaire systemen t.b.v. A a)
- 2) Theorie van niet-lineaire vergelijkingen in verband met lineaire resultaten.
- 3) Directe methode van Liapounoff.

Hoofdstuk VI. Lineaire systemen met constante coëfficiënten

De strenge theorie is eigenlijk matrix-rekening en lineaire algebra. Wij schetsen hier wat wij nodig hebben.

Transformatie.
$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Uit de matrix-theorie volgt, dat er een transformatie bestaat

$$\xi_p = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(p)} x_i$$

waardoor de vergelijking overgaat in

$$\frac{d\xi_p}{dt} = \lambda_p \xi_p \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Eigenwaarden. λ_p , zijnde de wortels van $\text{Det}(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$.

Wij zullen dit op elementaire wijze afleiden:

Vermenigvuldig met nog onbekende coëfficiënten σ_i en sommeer

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i x_i \right] = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i a_{ij} \right] x_j.$$

Wij willen dit zodanig hebben dat

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i a_{ij} = \lambda \sigma_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j. \end{cases}$$

Homogeen systeem voor n onbekenden σ_i . Oplossing bestaat als

$$\text{Det}(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0.$$

Dit is een algemene vergelijking van n-de orde in λ , dus n wortels

$$\lambda = \lambda_p \quad ; \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Bij elke wortel λ_p hoort de oplossing

$$\sigma_i^{(p)} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dus wij kunnen onze manipulaties op n verschillende manieren uitvoeren.

Noem nu:
$$\xi_p = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(p)} x_i \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Er volgt:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d\xi_p}{dt} = \lambda_p \xi_p \\ \text{Det}(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \end{array} \right. \quad \underline{\text{karakteristieke vergelijking.}}$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{array} \right| = 0.$$

De oplossingen zijn dus:

$$\xi_p = \alpha_p e^{\lambda_p t}.$$

Wij moeten nu alleen nog x_i terugvinden.

Stel eerst alle λ_p verschillend. (Dan zijn ξ_p ($p = 1, 2, \dots, n$) lineair onafhankelijk).

$$\xi_p = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(p)} x_i$$

Stel:
$$x_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \xi_j$$

$$\xi_p = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(p)} \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \xi_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^{(p)} \gamma_{ij} \right) \xi_j$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^{(p)} \gamma_{ij} = \delta_{jp} \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Voor elke $j = 1, 2, \dots, n$ is dit een stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden γ_{ij} . Stelsel is inhomogeen. Voorts is $\text{Det}(\sigma_i^{(p)}) \neq 0$. Immers, zou deze determinant gelijk nul zijn, dan zou het mogelijk zijn γ_{ij} zodanig te bepalen, dat $\sum \gamma_{ij} \xi_j = 0$, en dit kan niet, want ξ_j zijn lineair onafhankelijk.

Dus γ_{ij} zijn eenduidig bepaald, en daarmee x_i , in het geval λ_p alle verschillend zijn.

Samenvallende wortels.

Er zijn geen n lineair onafhankelijke ξ_p 's. Het valt buiten het kader van deze cursus de afleiding te geven. Volstaan hier met het geven van het algemene resultaat:

$$x_i = \sum_{p=1}^k \gamma_{pi} \left\{ \sum_{m=0}^{v_p-1} \alpha_{ip}^{(m)} t^m \right\} \xi_p \quad \text{waarbij:}$$

k aantal verschillende wortels λ_p

v_p natuurlijk getal, hoogstens gelijk aan orde van multipliciteit van λ_p .

Gedrag van $t \rightarrow \infty$: wordt dus in alle gevallen bepaald door de wortels λ_p van de karakteristieke vergelijking. Deze is een algebraïsche vergelijking met reële coëfficiënten λ_p , de wortels zijn dus reëel of toegevoegd complexe paren.

Stelling. De triviale oplossing is:

- a) asymptotisch stabiel, als $\text{Re}(\lambda_p) < 0$ voor alle p .
- b) stabiel in de zin van Liapounoff, als $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$; $\text{Re}(\lambda_p) < 0$ voor $p > 2$ met $v_1, v_2 = 1$.
- c) Instabiel in alle andere gevallen.

Naar aanleiding van de lineaire analyse spreekt men ook van:

Stabiliteit, als $\operatorname{Re}(\lambda_p) < 0$

Neutrale stabiliteit, als er wortels zijn met $\operatorname{Re}(\lambda_p) = 0$,
terwijl alle andere $\operatorname{Re}(\lambda_p) < 0$.

Instabiliteit, als er λ_p zijn met $\operatorname{Re}(\lambda_p) > 0$.

Vergelijk met de resultaten voor singuliere punten in $\mathbb{R}^2$.

Onafhankelijke oplossingen en fundamentele matrix.

Wij hebben uiteraard oneindig veel oplossingen, want α_p zijn nog vrij en te bepalen uit de beginwaarden. Beschouw bijv. het geval van niet-samenvallende wortels. Dan volgt:

$$x_i(0) = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \alpha_j$$

zodat bij iedere gegeven $x_i(0)$ men α_j kan bepalen.

Elke oplossing, met willekeurige beginvoorwaarden, noemen wij $X^{(0)}$.

Wij construeren nu een systeem van n vectoren $X_j = \{\phi_{ij}\}$, zodanig dat voor $t = 0$ $X_j = \{\delta_{ij}\}$. Dit noemen wij een fundamenteel systeem.

De matrix $\phi(t) = \{\phi_{ij}\}$ waarbij in de j -de kolom de componenten van X_j zijn geschreven, noemen wij de fundamentele matrix. De matrix $\{\delta_{ij}\}$ noemen wij I , de identiteitsmatrix.

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_j & X_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{1j} & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{2j} & \phi_{2n} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{3j} & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{nj} & \phi_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & \dots & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \dots & \dots & \dots & a_{np} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = I$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \dots & a_{np} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zij $x^{(0)}(0) = \psi$.

Wij hebben de matrix-relatie

$$x^{(0)}(t) = \Phi(t) \cdot \psi$$

d.w.z.

$$x_i^{(0)} = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \psi_j$$

De fundamentele matrix voldoet aan

$$\frac{d\Phi}{dt} = A \cdot \Phi, \text{ waarbij } \frac{d\Phi}{dt} \text{ de matrix is van } \frac{d\phi_{ij}}{dt},$$

terwijl dus $\Phi(0) = I$,

d.w.z.

$$\frac{d\phi_{ij}}{dt} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \phi_{pj} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Dit is de normale definitie van matrixvermenigvuldiging. Bovendien kunnen wij dit als volgt interpreteren: voor elke j staan in de i -rij veelvouden van x_i zodat voor elke j dit de vergelijking van het uitgangspunt is.

Inhomogene vergelijking en fundamentele matrix

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + f_i(t)$$

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + F(t).$$

Oplossing is:

$$X(t) = \phi(t) \cdot \psi + \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot F(\tau) d\tau.$$

Substitueer:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} \cdot \psi + F(t) + \int_0^t \frac{d\phi(t-\tau)}{dt} \cdot F(\tau) d\tau \\ &= A \cdot \phi(t) \cdot \psi + A \cdot \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot F(\tau) d\tau + F(t) \\ \int_0^t \left\{ \frac{d\phi(t-\tau)}{dt} - A\phi(t-\tau) \right\} \cdot F(\tau) d\tau &= 0, \text{ inderdaad.} \end{aligned}$$

Wij kunnen dit ook uitwerken in component-vorm:

$$x_i(t) = x_i^{(0)}(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^n f_j(\tau) \cdot \phi_{ij}(t-\tau) d\tau.$$

Substitueer in vergelijking: $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{p=1}^n a_{ip} x_p + f_i$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i^{(0)}}{dt} + f_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n f_j(\tau) \frac{d\phi_{ij}(t-\tau)}{dt} d\tau.$$

Substitutie in rechterlid van vergelijking:

$$\sum_{p=1}^n a_{ip} x_p^{(0)} + f_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n f_j(\tau) \sum_{p=1}^n a_{ip} \phi_{pj}(t-\tau) d\tau.$$

Linkerlid = rechterlid, want

$$\frac{d\phi_{ij}}{dt} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \phi_{pj}(t-\tau).$$

Inhomogene vergelijking. Expliciete constructie

Wij gaan het voorgaande illustreren op een meer vertrouwde wijze.

Stel alle λ_p verschillend. De transformatie

$$\xi_p = \sum_{i=1}^n \sigma_{ip} x_i \quad \text{levert}$$

$$\frac{d\xi_p}{dt} = \lambda_p \xi_p + \sum_{i=1}^n \sigma_{ip} f_i(t),$$

waarbij de laatste som de projectie van F op de p -e component van de ξ -ruimte weergeeft.

Integratie levert:

$$\xi_p = \alpha_p e^{\lambda_p t} + \int_0^t e^{\lambda_p(t-\tau)} \sum_{i=1}^n \sigma_{ip} f_i(\tau) d\tau.$$

Dit is reeds een illustratie van de boven verkregen algemene formule.

Immers, in de ξ -ruimte is de fundamentele matrix

$$\{\phi_{pq}\} = e^{\lambda_p(t-\tau)} \{\delta_{pq}\}.$$

Nu x_j terugvinden:

$$x_j = \sum_{p=1}^n \gamma_{jp} \xi_p$$

$$x_j = \sum_{p=1}^n \gamma_{jp} \alpha_p e^{\lambda_p t} + \int_0^t \sum_{i=1}^n f_i(\tau) \left\{ \sum_{p=1}^n \sigma_{ip} \gamma_{jp} e^{\lambda_p(t-\tau)} \right\} d\tau,$$

waarbij dus $\sum_{p=1}^n \sigma_{ip} \gamma_{jp} e^{\lambda_p(t-\tau)}$ voor dit geval expliciet de componenten

zijn van de fundamentele matrix.

Hoofdstuk VII. Lineaire systemen met variabele coëfficiënten

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j.$$

Uit het oogpunt van de stabiliteitstheorie gaat het ons om het gedrag van x_i als $t \rightarrow \infty$. Enorme literatuur. Wij volstaan hier met enkele fundamentele resultaten.

Stel dat $a_{ij}(t) = \alpha_{ij} + \beta_{ij}(t)$,

waarbij $\beta_{ij} \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$. Dan is het niet uitgesloten dat het gedrag van x_i voor $t \rightarrow \infty$ gerepresenteerd wordt door de oplossingen van de vergelijking met constante coëfficiënten.

Definitie. $||A|| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$

Stelling A. Zij $\bar{x}_i$ gedefiniëerd door

$$(I) \quad \frac{d\bar{x}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{x}_j$$

en x_i gedefiniëerd door

$$(II) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t)x_j.$$

Als $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_i = 0$ of $\bar{x}_i$ begrensd en $\int_0^{\infty} ||\beta|| dt < \infty$

dan is ook $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = 0$ of x_i begrensd.

Bewijs: Wij behandelen (II) als een inhomogene vergelijking:

$$x_i = \bar{x}_i + \int_0^t \sum_{p=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \beta_{pj}(\tau)x_j(\tau) \right\} \phi_{ip}(t-\tau) d\tau$$

met $\{\phi_{ip}\}$ fundamentele matrix van (I).

$$||X(t)|| \leq ||\bar{X}(t)|| + \int_0^t ||\beta(\tau)|| \cdot ||X(\tau)|| \cdot ||\phi(t-\tau)|| d\tau.$$

Daar $\bar{x}_1$ begrensd zijn, kunnen wij stellen

$$||\phi(t-\tau)|| \leq c_0$$

$$||\bar{X}(t)|| \leq c_0 ||\bar{X}(0)||.$$

Er volgt dus:

$$||X|| \leq c_0 ||\bar{X}(0)|| + c_0 \int_0^t ||\beta(\tau)|| \cdot ||X(\tau)|| \cdot d\tau.$$

Lemma (Gronwall).

(Hebben wij in iets andere vorm reeds gebruikt).

Zij $u(t)$ en $v(t)$ positieve continue functies en $k > 0$.

Als
$$u(t) \leq k + \int_0^t u(s)v(s)ds$$

dan is
$$u(t) \leq k \exp \left\{ \int_0^t v(s)ds \right\}.$$

Bewijs:

$$\frac{u(s)v(s)}{k + \int_0^s u(\tau)v(\tau)d\tau} \leq v(s).$$

Integratie t.o.v. s tussen 0 en t levert

$$\log(k + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau) - \log k \leq \int_0^t v(s)ds.$$

Dus
$$k + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau \leq k \exp \int_0^t v(s)ds$$

en dus
$$u(t) \leq k \exp \int_0^t v(s)ds.$$

Vertaal: $u \rightarrow ||X||$ $k \rightarrow C_0 ||\bar{X}(0)||$ $v \rightarrow C_0 ||\beta(\tau)||$.

Volgt door toepassing van lemma:

$$||X(t)|| \leq C_0 ||\bar{X}(0)|| \exp \left\{ C_0 \int_0^t ||\beta(\tau)|| d\tau \right\}.$$

Dus: als $\int_0^\infty ||\beta(\tau)|| d\tau$ begrensd is, dan is ook $||X(t)||$ begrensd.

In het geval $\bar{x}_i \rightarrow 0$ kunnen wij verfijnen door te stellen

$$||\phi(t)|| \leq c^* e^{-\mu t} \quad c^* > 0, \mu > 0.$$

Er volgt dan op dezelfde wijze dat $||X(t)|| \rightarrow 0$.

Stelling B. Zij $\bar{x}_i$ en x_i gedefiniëerd als in stelling A. Indien

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{x}_i = 0$$

$$\text{en} \quad ||\beta|| \rightarrow 0 \quad \text{voor} \quad t \rightarrow \infty$$

$$\text{dan is} \quad \lim_{t \rightarrow 0} x_i = 0.$$

$||\beta||$ hoeft dus niet integreerbaar te zijn.

Bewijs: $||\phi|| \leq c^* e^{-\mu t}.$

$$||X(t)|| \leq c^* ||\bar{X}(0)|| e^{-\mu t} + c^* e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \tau} ||\beta|| ||X|| d\tau.$$

Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een t_0 , zodanig dat voor $t \geq t_0$
 $||\beta|| < \varepsilon.$

$$\begin{aligned} ||X(t)|| &\leq c^* ||\bar{X}(0)|| e^{-\mu t} + c^* e^{-\mu t} \int_0^{t_0} e^{\mu \tau} ||\beta|| ||X|| d\tau + \\ &\quad + \varepsilon c^* e^{-\mu t} \int_{t_0}^t e^{\mu \tau} ||X|| d\tau. \end{aligned}$$

Bestaan van de integraal $\int_0^{t_0} e^{\mu\tau} ||\beta|| ||X|| d\tau$ volgt uit de grovere afschatting

$$||\beta|| < c_1 \text{ voor alle } 0 \leq t \leq \infty,$$

volgt

$$||X|| \leq c^* ||\bar{X}(0)|| e^{-(\mu - c_1)t}.$$

Definitie.

$$c^* \{ ||\bar{X}(0)|| + \int_0^t e^{\mu\tau} ||\beta|| \cdot ||X|| d\tau \} = c^{***} ||\bar{X}(0)||$$

$$c^{***} > c^*$$

$$e^{\mu t} ||X(t)|| \leq c^{***} ||\bar{X}(0)|| + \varepsilon c^* \int_{t_0}^t e^{\mu\tau} ||X(\tau)|| d\tau.$$

Pas nu toe het lemma van Gronwall met

$$u = e^{\mu t} ||X(t)||; k = c^{***} ||\bar{X}(0)||; v = \varepsilon c^*.$$

Volgt:

$$e^{\mu t} ||X(t)|| \leq c^{***} ||\bar{X}(0)|| e^{\varepsilon c^* (t - t_0)}$$

$$||X(t)|| \leq c^{***} e^{-\varepsilon c^* t_0} ||\bar{X}(0)|| \cdot e^{-(\mu - \varepsilon c^*)t}.$$

Daar wij ε willekeurig klein kunnen kiezen volgt

$$||X(t)|| \rightarrow 0.$$

Stelling C. Zij $\bar{X}$ en X gedefiniëerd als in stelling A, met $||\beta|| \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$. Als er een λ_p bestaat met $\text{Re}(\lambda_p) > 0$, dan bestaat er op zijn minst één oplossing X met $\lim_{t \rightarrow \infty} X = \infty$.

Bewijs: (zie bijv. Roseau).

Men kan na transformatie de differentiaalvergelijking schrijven als

$$\frac{d\xi_p}{dt} = \lambda_p \xi_p + \sum_{i=1}^n \beta_{ip} \xi_i$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2, \dots, \operatorname{Re} \lambda_k > 0,$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{k+1}, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n \leq 0.$$

Vermenigvuldig voor $p \leq k$ met $\bar{\xi}_p$, voor $p \geq k+1$ met $-\bar{\xi}_p$ en tel op (neem hierbij reële delen):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{p=1}^k |\xi_p|^2 - \sum_{p=k+1}^n |\xi_p|^2 \right\} &= \sum_{p=1}^k \operatorname{Re}(\lambda_p) |\xi_p|^2 - \\ &\sum_{p=k+1}^n \operatorname{Re}(\lambda_p) |\xi_p|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^k \bar{\xi}_p \sum_{i=1}^n \beta_{ip} \xi_i - \sum_{p=k+1}^n \bar{\xi}_p \sum_{i=1}^n \beta_{ip} \xi_i \right\}. \end{aligned}$$

Aangezien β_{ip} willekeurig klein worden, kunnen wij stellen dat voor $t > t_0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{p=1}^k |\xi_p|^2 - \sum_{p=k+1}^n |\xi_p|^2 \right\} \geq \varepsilon \left\{ \sum_{p=1}^k |\xi_p|^2 - \sum_{p=k+1}^n |\xi_p|^2 \right\}.$$

Immers eerste groep is positief, $\operatorname{Re} \{ \}$ is willekeurig klein.

Als nu de vorm tussen $\{ \}$ op het begintijdstip t_0 positief is, dan

$$\sum_{p=1}^k |\xi_p|^2 - \sum_{p=k+1}^n |\xi_p|^2 \geq \left\{ \sum_{p=1}^k |\xi_p(t_0)|^2 - \sum_{p=k+1}^n |\xi_p(t_0)|^2 \right\} e^{2\varepsilon(t-t_0)}.$$

Opmerking. Er bestaan vele verscherpingen, raffinementen en speciale gevallen van bovenstaande stelling. Zie bijv. L. Cesari.

Vergelijking met periodieke coëfficiënten (stabiliteit van periodieke oplossingen).

Van de zeer uitvoerige theorie vermelden wij hier zonder bewijs de

Stelling van Floquet. Zij $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$

$$A(t+T) = A(t) \text{ continu.}$$

Er bestaat op zijn minst één niet-triviale oplossing met de eigenschap

$$X(t+T) = \lambda X(t),$$

$\lambda \neq 0$ een constante.

Enige resultaten van de Floquet-theorie:

Analoog aan het geval van constante coëfficiënten kan er een matrix gedefiniëerd worden, waarvan de n -eigenwaarden λ_n de multiplicatieve constanten bepalen.

Wij hebben: asymptotische stabiliteit als $|\lambda_i| < 1$
 stabiliteit in de zin van Liapounoff als $|\lambda_i| \leq 1$
 instabiliteit als $|\lambda| > 1$.

Merk op dat indien wij een oplossing $X(t+T) = \lambda_p X(t)$ hebben, dit equivalent is met $X(t) = e^{pT} P(t)$; $P(t) = P(t+T)$. p zijn de karakteristieke exponenten, gedefiniëerd door $\lambda_p = e^{pT}$.

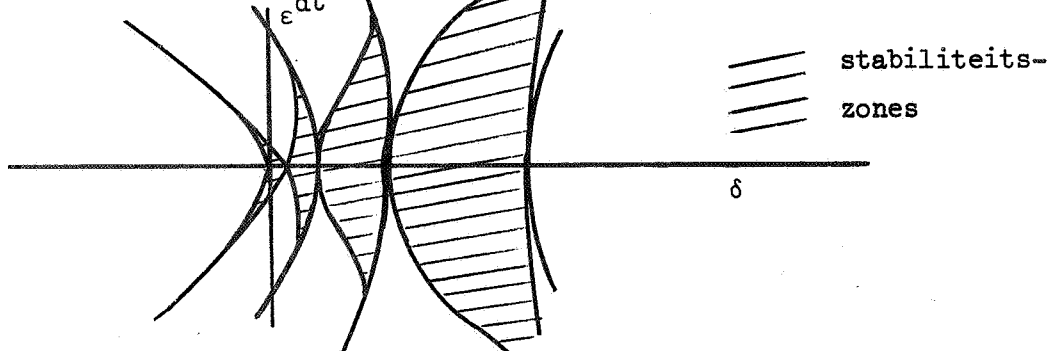
Immers: $X(t+T) = e^{pT} P(t+T) = e^{pT} X(t)$, inderdaad.

Moeilijkheid in praktijk is het construeren van de basisvectoren waaruit de karakteristieke matrix kan worden bepaald.

Voorbeeld.

Verg. van Mathieu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + [\delta + \epsilon \cos 2t] x = 0.$$



Hoofdstuk VIII. Stabiliteit van niet-lineaire systemen

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(X, t).$$

Wij beschouwen eerst A als een constante matrix. Voorts

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\|F\|}{\|X\|} = 0, \text{ uniform voor } t \geq 0.$$

Stelling van Poincaré-Liapounoff.

Als de eigenwaarden λ_p van A voldoen aan

$$\operatorname{Re}(\lambda_p) < 0 \quad p = 1, \dots, n$$

dan is $X = 0$ een asymptotisch stabiele oplossing, d.w.z. er bestaat een verzameling D_0 , de oorsprong bevattend, zodanig dat indien $X(0) \in D_0$, dan geldt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X = 0.$$

Bewijs. Definiëer de fundamentele matrix Φ .

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi \quad \Phi(0) = I$$

$$X(t) = \Phi \cdot \Psi + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot F(X(\tau), \tau) d\tau.$$

Wegens $\Phi \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$ kunnen wij stellen

$$\|\Phi\| \leq k e^{-\mu t} \quad \mu > 0, k > 0.$$

$$\|X(t)\| \leq k \cdot \|\Psi\| \cdot e^{-\mu t} + k \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \cdot \|F(X(\tau), \tau)\| d\tau.$$

Daar $\frac{\|F\|}{\|X\|} \rightarrow 0$ als $\|X\| \rightarrow 0$ kunnen wij stellen:

gegeven $\varepsilon > 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat

$$\frac{\|F\|}{\|X\|} \leq \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{als} \quad \|X\| \leq \delta.$$

Stel dus nu $||\psi|| < \delta$, dan kunnen wij, zolang $||X|| \leq \delta$ (en er is zeker een tijdsinterval waarin dit waar is, wegens continuïteit) schrijven:

$$||X(t)|| \leq k||\psi||e^{-\mu t} + \varepsilon \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} ||X(\tau)|| d\tau.$$

Met het lemma van Gronwall volgt

$$||X|| \leq k||\psi||e^{-(\mu-\varepsilon)t}.$$

Als wij dan $\varepsilon < \mu$ hebben gekozen en $||\psi|| < \frac{\delta}{k}$, dan blijft $||X|| < \delta$ voor alle $t > 0$ en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||X|| = 0.$$

Opmerking. Wij kunnen zelfs een beschrijving van D_0 geven. μ is de kleinste eigenwaarde. k is een constante die slechts van matrix A afhangt. Gegeven de eis $\varepsilon < \mu$, dan volgt uit de vorm van F de waarde van δ , en daaruit $||\psi|| < \frac{\delta}{k}$.

Voorbeeld. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(y, \frac{dy}{dt}), \quad \mu > 0$

gelineariseerd:

$$y = e^{\lambda t} \quad \lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2})$$

$$y = x_1; \frac{dy}{dt} = x_2 \quad \text{Re}(\lambda) < 0.$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2 - \omega^2 x_1 + f(x_1, x_2).$$

Als $\lim_{||X|| \rightarrow 0} \frac{f}{||X||} = 0$ dan is $x_1 = x_2 = 0$ stabiel.

Gegeneraliseerde stelling van Poincaré - Liapounoff.

Zij $\frac{dX}{dt} = [A + B(t)]X + F(X, t)$, met $B(t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$ en $\frac{||F||}{||X||} \rightarrow 0$

als $||X|| \rightarrow 0$.

Als de eigenwaarden van A alle negatief reële delen bezitten, dan bestaat er een D_0 , de oorsprong omvattend, zodanig dat indien $X(0) \in D_0$ er geldt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X = 0.$$

$$\text{Bewijs: } X(t) = \Phi(t) \cdot \Psi + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot B(\tau) \cdot X(\tau) d\tau + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot F d\tau$$

$$||\Phi(t)|| \leq k e^{-\mu t}$$

$$||F|| \leq \frac{\varepsilon}{2k} ||X|| \quad \text{voor} \quad ||X|| < \delta$$

$$||B|| \leq \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{voor} \quad t \geq t_0$$

$$||X|| \leq k ||\Psi|| e^{-\mu t} + k e^{-\mu t} \int_0^{t_0} e^{\mu \tau} ||B(\tau)|| ||X(\tau)|| d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\mu t} \int_{t_0}^t e^{\mu \tau} ||X|| d\tau + \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \tau} ||X|| d\tau$$

$$e^{\mu t} ||X|| \leq \{k ||\Psi|| + k \int_0^{t_0} e^{\mu \tau} ||B(\tau)|| \cdot ||X(\tau)|| d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{t_0} e^{\mu \tau} ||X|| d\tau\} + \frac{1}{2} \varepsilon \int_{t_0}^t e^{\mu \tau} ||X|| d\tau.$$

Volgt met lemma van Gronwall

$$||X|| \leq C e^{-(\mu-\varepsilon)(t-t_0)}.$$

Het bestaan van de integralen tussen de accoladen volgt weer uit grovere afschatting $||B|| \leq \frac{1}{k} \quad 0 \leq t < \infty$, levert

$$||X|| \leq k ||\Psi|| e^{-(\mu-c_1-\varepsilon)t}$$

als bij lineaire systemen met variabele coëfficiënten.

Opmerking. Als men in plaats van de gestelde eisen slechts stelt dat oplossingen van gelineariseerde vergelijkingen naar nul gaan als $t \rightarrow \infty$, dan is niet-lineair de stabiliteit niet verzekerd. Dit demonstreren wij aan een voorbeeld van Perron:

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = (-2a + \sin \ln t + \cos \ln t)x_2 + x_1^2.$$

Men ziet dat $B(t) \not\rightarrow 0$. Toch gaan de oplossingen van de gelineariseerde vergelijking $\rightarrow 0$. Men vindt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gelineariseerd:} \\ x_1 = c_1 e^{-at} \\ x_2 = c_2 e^t \sin \ln t - 2at \end{array} \right\} \rightarrow 0 \text{ als } a > \frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Niet-lineaire} \\ \text{oplossing:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = c_1 e^{-at} \\ x_2 = e^t \sin \ln t - 2at (c_2 + c_1^2 \int_0^t e^{-\tau} \sin \ln \tau d\tau). \end{array}$$

Als nu $1 < 2a < 1 + \frac{1}{2}e^{-\pi}$ en $c_1 \neq 0$ dan is $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2 = \infty$.

Immers neem rij getallen $t_n = e^{(2n + \frac{1}{2})\pi}$

$$\int_0^{t_n} e^{-\tau} \sin \ln \tau d\tau > \int_{t_n e^{-\pi}}^{t_n e^{-(2/3)\pi}} e^{-\tau} \sin \ln \tau d\tau$$

$$t_n e^{-(2/3)\pi} = e^{2\pi n - (1/3)\pi}, \quad t_n e^{-\pi} = e^{2\pi n - (1/2)\pi}.$$

In het interval $(t_n e^{-\pi}, t_n e^{-(2/3)\pi})$ is $\sin \ln \tau < 0$ en $|\sin \ln \tau| \geq \frac{1}{2}$, zodat dus

$$e^{-\tau} \sin \ln \tau \geq e^{\frac{1}{2}\tau} > e^{\frac{1}{2}t_n e^{-\pi}}.$$

$$\text{Dus} \quad \int_0^{t_n} e^{-\tau} \sin \ln \tau d\tau > e^{\frac{1}{2}t_n e^{-\pi}} t_n [e^{-(2/3)\pi} - e^{-\pi}].$$

$$\text{Nu is} \quad \sin \ln t_n = 1$$

$$e^{t_n \sin \ln t_n - 2at_n} \int_0^{t_n} e^{-\tau} \sin \ln \tau d\tau > e^{t_n(1-2a+\frac{1}{2}e^{-\pi})} t_n (e^{-(2/3)\pi} - e^{-\pi}).$$

Wij geven nog zonder bewijs een tweetal uitbreidingen:

Stelling. Zij $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + F(X,t)$

$A(t)$ periodiek; $\frac{\|F\|}{\|X\|} \rightarrow 0$ als $\|X\| \rightarrow 0$.

Als alle oplossingen X_0 van

$$\frac{dX_0}{dt} = A(t) \cdot X_0$$

naar nul gaan voor $t \rightarrow \infty$, dan gaan ook alle oplossingen
 $X \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.

Het bewijs berust op constructie van fundamentele matrix voor
 periodieke gevallen.

Stelling. Zij $\frac{dX}{dt} = A \cdot X + F$.

Als A tenminste één positieve eigenwaarde bezit en $\frac{\|F\|}{\|X\|} \rightarrow 0$
 als $\|X\| \rightarrow 0$, dan bestaat er een oplossing $X \rightarrow \infty$ als $t \rightarrow \infty$.

Bewijs zie b.v. Roseau.

Opmerking. Wij hebben niet gesproken over het geval, waarin A één
 eigenwaarde heeft met het reële deel 0. Dit is zeer
 delicaat. Zie bijv. Roseau.

Hoofdstuk IX. Directe methode van Liapounoff

Liapounoff-functie. Zij $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$.

Def. S_0 verzameling $[t_0 \leq t < \infty, ||X|| \leq b]$.

f_i zijn reëel en continu in S_0 , voorts is aan alle existentie- en eenduidigheidseisen voldaan.

$f_i(t, 0) = 0$ zodat $X = 0$ singulier punt is.

$V(t, X)$ reëel en continu in $S \subset S_0$. $S: \begin{cases} T \leq t < \infty; t_0 \leq T \\ ||X|| \leq B; 0 < B \leq b. \end{cases}$

$V(t, X)$ bezit continue eerste afgeleiden, d.w.z. $\frac{\partial V}{\partial t}; \frac{\partial V}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$.

$V(t, 0) = 0$ voor $t \geq T$.

V is positief semidefiniet in S als $V \geq 0$ in S .

$W(X)$ (dus een V -functie, onafhankelijk van t) is positief definit als $W > 0$ voor alle $X \neq 0$ en $||X|| \leq B$.

$V(t, X)$ is positief definit, als er een positief definitie functie $W(X)$ bestaat, zodanig dat $V \geq W$ in S .

Analoge definitie voor ~~negatief~~ semidefiniet en definit.

V is begrensd als $|V| < M, M > 0$, in S .

Begrensd V heeft een infinitesimale bovengrens als er bij gegeven $\varepsilon > 0$ een $h > 0$ bestaat, zodat $|V| < \varepsilon$ voor $||X|| < h$ en $t > T$. Dit betekent dat $V \rightarrow 0$ als $X \rightarrow 0$ uniform t.o.v. de tijd.

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i.$$

V' is dus de afgeleide langs een baankromme, als wij voor X de oplossingen invullen.

Stelling van Liapounoff I. Als er een definitieve functie V bestaat met de afgeleide V' semidefinit en het teken van V' ongelijk aan het teken van V , dan is $X = 0$ een stabiele oplossing (in de zin van Liapounoff).

Bewijs: Neem V positief definit. Dus er bestaat een $W(X)$ zodanig dat

$$V(X,t) \geq W(X) > 0 \quad \text{in} \left\{ \begin{array}{l} ||X|| \leq B; 0 < B \leq b; \\ T \leq t < \infty; t_0 \leq T \end{array} \right.$$

$$V'(X,t) \leq 0 \quad \text{in hetzelfde gebied.}$$

Beschouw een oplossing $X(t)$ met $||X(t_0)|| < B$ en laat $[T, t)$ een interval zijn, waarin $||X(t)|| < B$. Wij kunnen hebben of $t_1 = +\infty$ of $T \leq t_1 < \infty$.

$$\text{Nu} \quad \int_T^t V'(X(\tau), \tau) d\tau = V[X(t), t] - V[X(T), T] \leq 0.$$

$$\text{Dus} \quad 0 < V[X(t), t] \leq V[X(T), T].$$

Neem nu $\epsilon > 0$; $0 < \epsilon \leq B$, laat I de verzameling zijn van X zodanig dat $\epsilon \leq ||X|| \leq B$. $\text{Min } |W(X)| = \mu > 0$. Definiëer een gebied van beginwaarden zodanig dat voor I $||X(T)|| \leq \lambda$, $V(X(T), T) < \mu$ er volgt

$$W(X) \leq V(X(t), t) \leq V(X(T), T) < \mu.$$

$V(X(T), T) < \mu$ kan altijd wegens continuïteit van V en $V(t, 0) = 0$.

Noodzakelijk moet $\lambda < \epsilon$, want $W \leq V < \mu$ voor $t = T$, zodat het niet kan, dat $\mu < W$.

Stel nu dat initiëel $||X(T)|| < \lambda$, dan kan het niet gebeuren dat $||X(t)|| > \epsilon$ voor $t > t_2 > T$, want dan zou gelden

$$\mu > V[X(t), t] > W(X) > \text{Min } W(X) > \mu,$$

dus contradictie.

Bijgevolg $||X|| < \epsilon$ voor alle t en dus stabiliteit in de zin van Liapounoff.

Voorbeeld van toepassing.

$$\gamma \frac{dx_1}{dt} = (\alpha - \beta) \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\beta \frac{dx_2}{dt} = (\gamma - \alpha) \cdot x_1 \cdot x_3 \quad 0 < \gamma < \beta < \alpha$$

$$\alpha \frac{dx_3}{dt} = (\beta - \gamma) \cdot x_1 \cdot x_2$$

Stationaire opl. bijv.: $x_2 = x_3 = 0$ $x_1 = r_0 = \text{constant}, > 0$

Stel dus nu: $x_1 = r_0 + \xi$; $x_2 = \eta$; $x_3 = \zeta$.

$$\gamma \frac{d\xi}{dt} = (\alpha - \beta)\eta\zeta$$

$$\beta \frac{d\eta}{dt} = (\gamma - \alpha)(r_0 + \xi)\zeta$$

$$\alpha \frac{d\zeta}{dt} = (\beta - \gamma)(r_0 + \xi)\eta$$

Gelineariseerd stelsel vergelijkingen:

$$\gamma \frac{d\xi_0}{dt} = 0$$

ξ_0 constant

$$\beta \frac{d\eta_0}{dt} = (\gamma - \alpha)r_0\zeta_0$$

dit is het gemakkelijkst
op te lossen door bijv.

$$\alpha \frac{d\zeta_0}{dt} = (\beta - \gamma)r_0\eta_0$$

ζ_0 te elimineren.

Karakteristieke vergelijking:

$$\lambda \left[\lambda^2 - \frac{1}{\alpha\beta} r_0^2 (\gamma - \alpha)(\beta - \gamma) \right] = 0.$$

Dus $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_{2,3}$ imaginair, want $\frac{1}{\alpha\beta} r_0^2 (\gamma - \alpha)(\beta - \gamma) < 0$.

Van alle drie eigenwaarden is het reële deel dus nul. Dit is het geval, waarvoor wij geen stelling van Liapounoff-Poincaré hebben afgeleid en het verkrijgen van resultaten zeer moeilijk is.

Nu directe methode:

$$V = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} \zeta^2 + \frac{\beta-\gamma}{\alpha} \eta^2 + \{\alpha\zeta^2 + \beta\eta^2 + \gamma[2r_0\xi + \xi^2]\}^2.$$

V is positief definit.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} = 2\{\dots\} \cdot 2\gamma(r_0 + \xi) \frac{\alpha-\beta}{\gamma} \eta\zeta + \\ &+ 2\{\dots\} \cdot 2\beta\eta \cdot \frac{\gamma-\alpha}{\beta} (r_0 + \xi)\zeta + 2\eta \frac{\beta-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\gamma-\alpha}{\beta} (r_0 + \xi)\zeta \\ &+ 2\{\dots\} 2\alpha\zeta \cdot \frac{\beta-\gamma}{\alpha} (r_0 + \xi)\eta + 2\zeta \frac{\alpha-\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\alpha} (r_0 + \xi)\eta. \end{aligned}$$

$$V' = 0.$$

Opmerking: Als wij alleen $V = \{\alpha\zeta^2 + \beta\eta^2 + \gamma[2r_0\xi + \xi^2]\}$ hadden genomen, dan was ook $V' = 0$, maar V was alleen positief semidefiniet, want $\{\dots\}$ kan nul worden.

Dus aan de eisen van de stelling is voldaan, bijgevolg is de oplossing $\xi = \eta = \zeta = 0$ stabiel in de zin van Liapounoff.

Merk op dat de vorm van V uit de hemel valt. De hele moeilijkheid van de Liapounoff-methode is ook inderdaad de constructie van V, waarvoor in het algemeen weinig richtlijnen zijn te vinden.

Stelling van Liapounoff II. Als er een definitieve functie V bestaat, met infinitesimale bovengrens, zodanig dat V' eveneens definitief is en ongelijk van teken, dan is $X = 0$ een asymptotisch stabiele oplossing.

Opmerking: in vergelijking met stelling I hebben wij hier twee extra eisen:

- 1) $V \rightarrow 0$ als $X \rightarrow 0$
- 2) V' definitief en niet meer semidefiniet.

Stelling van Liapounoff III. Als er een definitieve functie V bestaat met een infinitesimale bovengrens en definitieve V' en een $X(t)$, zodanig dat $||X(t)|| \leq b$ (b willekeurig klein) en voor $t > t_1 > T$ V en V' hetzelfde teken kunnen hebben dan is $X = 0$ instabiel.

Bewijs van stelling II en III bijvoorbeeld in Roseau en in Cesari.

Toepassing I.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

V is een willekeurige functie van $x_1, \dots, x_n$ en differentiëerbaar waarbij de afgeleiden continu zijn.

Nu is

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = V' \quad \text{positief definitief.}$$

Dus: als V negatief definitief is, dan is $X = 0$ stabiel.

als V positief definitief is, dan is $X = 0$ instabiel.

Toepassing II.

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Beweging van een eenheidsmassa-punt in een potentiaal-veld $W(x_1, x_2, x_3)$.

Wij veronderstellen $W(0,0,0) = 0$.

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+3}; \quad \frac{dx_{i+3}}{dt} = - \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

$V = W(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)$ (som van potentiële en kinetische energie).

$$V' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=4}^6 x_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} x_{i+3} - x_{i+3} \frac{\partial W}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Dus V' is semidefiniet. Als W positief definit is, dan is ook V positief definit en $X = 0$ is stabiel in de zin van Liapounoff.

Toepassing III. Conservatief dynamisch systeem.

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

H is de functie van Hamilton.

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \\ &+ \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \end{aligned}$$

Zij nu H zodanig dat $H(0) = 0$ en $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ voor $p_i = 0, q_i = 0$.

Dan is $p_i = q_i = 0$ een oplossing. $H = U + T$, waarbij T , de kinetische energie, positief definit is. Dus als potentiële energie U positief definit is, dan is de oplossing stabiel.

Opmerking: Er is een zeer omvangrijke literatuur met verdere uitbreidingen, verscherpingen en toepassingen van deze methode.

Stellingen van Poincaré-Liapounoff en de tweede methode.

Men kan met de tweede methode bijzonder elegant de eerder gegeven stellingen bewijzen.

Beschouw:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \lambda_i \xi_i + f_i^*(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Neem als voorbeeld het geval, dat λ_i reëel en negatief is

$$\lim_{||\xi|| \rightarrow 0} \frac{f_i^*}{||\xi||} = 0.$$

Beschouw nu

$$V = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \text{ positief definit met infinite-} \\ \text{simale bovengrens}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{d\xi_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \xi_i f_i^*.$$

Nu is $|f_i^*| < \varepsilon ||\xi||$ voor $||\xi|| < \delta$

dus $\left| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i^* \right| < \varepsilon ||\xi||^2$ voor $||\xi|| < \delta$

Bijgevolg bestaat er een omgeving van de oorsprong, zodanig dat $\frac{dV}{dt}$ negatief definit is.

Dus asymptotische stabiliteit.

Nu gegeneraliseerde stelling van Poincaré-Liapounoff. Wij beschouwen, terwille van de eenvoud, de vergelijking

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \lambda_i \xi_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ji}(t) \xi_j + f_i^*(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

met $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_{ji}(t) = 0.$

Neem weer $V = \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$

$$\frac{1}{2} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{j=1}^n \beta_{ji}(t) \xi_j + \sum_{i=1}^n \xi_i f_i^*.$$

Wegens het naar nul gaan van β bestaat er een T zodanig dat $T \leq t < \infty$ en $|\sum \xi_i \sum \beta_{ji} \xi_j| < \varepsilon ||\xi||^2$ dus als λ_i reëel en negatief, dan hebben wij onmiddellijk de asymptotische stabiliteit. Voor het geval $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, is het bewijs iets ingewikkelder, maar ook langs deze weg te bereiken.

Het geval $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0, \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0, n > 1$.

Wij gaan nu, volgens Liapounoff's tweede methode, dit geval beschouwen, waarvoor wij nog geen stelling van het type Poincaré-Liapounoff hebben afgeleid. (Andere gevallen van dit type onderzocht door Malkin.)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ij} x_j + f_i(x); \quad \frac{|f|}{|x|} \rightarrow 0.$$

Wij beschouwen ter vereenvoudiging λ_p reëel en alle verschillend.

$$x_i = \sum \gamma_{ij} \xi_j$$

levert:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \lambda_j \xi_j + f_j^*(\xi_1 \dots \xi_n).$$

Zij nu

$$V = \sum \xi_j^2.$$

$$\frac{dV}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \xi_i f_i^*. \text{ Zij nu } \lambda_1 = 0, \lambda_n < 0 (n > 1).$$

Wij schrijven:

$$\frac{dV}{dt} = 2\xi_1 f_1^*(\xi_1 \dots \xi_n) + 2 \sum_{i=2}^n (\lambda_i \xi_i^2 + \xi_i f_i^*).$$

Neem nu $||\xi|| < \delta$, zodat $|f_i^*| < \epsilon ||\xi||$.

De tweede groep van termen is negatief definitief.

Dus: als $\xi_1 f_1^*(\xi_1 \dots \xi_n)$ negatief definitief is, dan hebben wij stabiliteit.

Maar als $\xi_1 f_1^*(\xi_1 \dots \xi_n)$ positief definitief is, dan hebben voor

$\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n = 0$ V en V' hetzelfde teken en hebben wij instabiliteit.

Hoofdstuk X. De ontwikkeling van Poincaré

Inleiding. Beschouw de vergelijking van Van der Pol:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}; \quad \varepsilon \text{ parameter met } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Wij zoeken een ontwikkeling van x naar deze parameter, in het bijzonder de periodieke oplossing, waarvan het bestaan reeds bewezen is (p. 44).

Transformeren tot integraalvergelijking:

$$x = a_0 \cos t + b_0 \sin t + \varepsilon \int_0^t \sin(t-t')(1-x^2) \frac{dx}{dt'} dt'.$$

$$x(0) = a_0; \quad x'(0) = b_0.$$

Wij kunnen tijdsoorsprong zodanig kiezen, dat b.v. $b_0 = 0$.

Voor de hand ligt de ontwikkeling

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) \quad \text{met} \quad x_0(t) = a_0 \cos t.$$

Dit levert de identiteit (wij veronderstellen, dat de ontwikkeling convergent en differentiëerbaar is):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n = x_0 + \varepsilon \int_0^t \sin(t-t') [1 - (\sum \varepsilon^n x_n)^2] \sum \varepsilon^n \frac{dx_n}{dt'} dt'.$$

Gelijkstellen van gelijke machten van ε levert:

$$x_n = \int_0^t \sin(t-t') F(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) dt'.$$

Laten wij als voorbeeld $x_1(t)$ berekenen.

$$x_1 = -a_0 \int_0^t \sin(t-t')(1 - a_0^2 \cos^2 t') \sin t' dt'$$

Daar $(1 - a_0^2 + a_0^2 \sin^2 t') \sin t' = (1 - \frac{1}{4} a_0^2) \sin t' - \frac{1}{4} a_0^2 \sin 3t'$
geldt

$$x_1 = -a_0 \left\{ (1 - \frac{1}{4} a_0^2) \int_0^t \sin t' \sin(t-t') dt' - \frac{1}{4} a_0^2 \int_0^t \sin 3t' \sin(t-t') dt' \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} a_0 \left\{ (1 - \frac{1}{4} a_0^2) \int_0^t [\cos(2t'-t) - \cos t] dt' - \frac{1}{4} a_0^2 \int_0^t [\cos(4t'-t) \right.$$

$$\left. - \cos(2t'+t)] dt' \right\} = -\frac{1}{2} a_0 \left\{ (1 - \frac{1}{4} a_0^2) \left[\frac{1}{2} \sin(2t'-t) \right]_0^t - t \cos t \right\}$$

$$- \frac{1}{4} a_0^2 \left[\frac{1}{4} \sin(4t'-t) \right]_0^t - \frac{1}{2} \sin(2t'+t) \Big|_0^t \Big\}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} a_0 (1 - \frac{1}{4} a_0^2) t \cos t - \frac{1}{2} a_0 (1 - \frac{1}{4} a_0^2) \sin t + \frac{1}{8} a_0^3 \left[\frac{1}{4} \sin 3t \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \sin(-t) - \frac{1}{2} \sin 3t + \frac{1}{2} \sin t \right]$$

$$x_1 = \frac{1}{2} a_0 (1 - \frac{1}{4} a_0^2) t \cos t - \frac{1}{2} a_0 (1 - \frac{1}{4} a_0^2) \sin t + \frac{1}{8} a_0^3 \left[\frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t \right].$$

Wij zoeken een periodieke oplossing. Eén manier om een reeks periodiek te laten zijn is elke term periodiek te laten zijn. Dit betekent:
seculaire termen alle 0.

$$\rightarrow \underline{a_0 = 2.}$$

De amplitude van de oplossing is hiermee vastgelegd.

Men zou dan krijgen

$$x_1 = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t.$$

Gaan wij echter x_n , $n > 1$ na, dan komen de seculaire termen terug. Wij moeten ons dus meer vrijheid verschaffen en ons uitgangspunt herzien. Misschien heeft de periodieke oplossing niet de periode 2π . Bovendien convergentie?!

Laten wij opmerken dat wij, naast een zorgeloosheid t.a.v. de convergentie, met grote willekeur te werk zijn gegaan.

Wij kennen de periode a priori niet. Zij deze $\frac{2\pi}{\omega}$. Wij vermoeden $\omega(0) = 1$. Wij kunnen dus slechts stellen

$$x(t) = x(t + \frac{2\pi}{\omega}), \omega \text{ onbekend.}$$

Onder de veronderstelling van convergentie van de reeks is dit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t + \frac{2\pi}{\omega}).$$

Dit behoeft niet te betekenen $x_n(t) = x_n(t + \frac{2\pi}{\omega})$, want een reeks van niet-periodieke functies kan best een periodieke functie opleveren.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \cos(1+\varepsilon)t &= \cos t \cos \varepsilon t - \sin t \sin \varepsilon t = \\ &= \cos t - \varepsilon t \sin t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 \cos t + \frac{1}{6} \varepsilon^3 t^3 \sin t + \dots \end{aligned}$$

Zeker is de algemene term niet periodiek met periode $\frac{2\pi}{1+\varepsilon}$, de som echter wel.

Wij gaan nu de fundamentele behandeling van Poincaré volgen met enkele moderne modificaties. Historisch gezien bestaan er verschillende methoden (b.v. Lindstedt) die echter veelal hun betekenis hebben verloren.

Ontwikkelingsstelling van H. Poincaré

Er bestaat een aantal verwaterde versies. Om de mogelijkheden en beperkingen te zien, geven wij hier de algemene formulering.

Niet-lineair probleem. $\frac{dX}{dt} = f(X, t, \varepsilon)$
 $[X]_{t=0} = X_0$

$f(X, t, \varepsilon)$ is te ontwikkelen, d.w.z. voor $0 \leq t \leq t_1$, kan in een gebied van X, ε f worden ontwikkeld in convergente Taylor-reeksen naar $X = \xi(t)$ en naar ε .

Opmerking. De ontwikkelbaarheid stelt een eis aan de vorm van f , waaraan vaak automatisch is voldaan, omdat f een polynoom is. Bovendien speelt bij autonome systemen het tijdsinterval niet mee.

Genererend probleem.

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\xi, t, 0)$$

$$[\xi]_{t=0} = \xi_0$$

Wij beschouwen een oplossing ξ , gedefiniëerd voor $0 \leq t \leq t_1$ binnen het gebied, waarin f te ontwikkelen is.

Stelling. Voor voldoende kleine ε en

$$||X_0 - \xi_0|| < \varepsilon \cdot c_0 \quad (c_0 \text{ constante})$$

bestaat er een functie X , welke voldoet aan het niet-lineaire probleem en te ontwikkelen is in een convergente machtreeks

$$X(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X^{(n)}(t); \quad X^{(0)}(t) = \xi(t)$$

voor $0 < t < t_1$. De reeks is term voor term differentiëerbaar en

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{dX^{(n)}}{dt}.$$

De convergentie van beide reeksen is uniform in $0 \leq t \leq t_1$. Volledig bewijs in Roseau. Eenvoudige formulering in Davies & James. Schets in Minorski. Ook in Coddington & Levinson.

Bewijs van de ontwikkelingsstelling van Poincaré voor twee dimensies

(enigszins schetsmatig).

Wij transformeren eerst:

$$X - \xi = Z$$

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = f(Z+\xi, t, \varepsilon)$$

$$\frac{dZ}{dt} = f(Z+\xi, t, \varepsilon) - f(\xi, t, 0)$$

$$||Z||_{t=t_0} < \varepsilon c_0.$$

Wij schrijven dit in de vorm

$$\frac{dZ}{dt} = G(Z, t, \varepsilon), \text{ daar } \xi = \xi(t).$$

Merk op dat $G(0, t, 0) = 0$.

In twee dimensies nu:

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x, y, t, \varepsilon) \quad ; \quad |x(t_0)| < \varepsilon c_1$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi(x, y, t, \varepsilon) \quad ; \quad |y(t_0)| < \varepsilon c_2$$

Ontwikkeling:

$$\frac{dx}{dt} = \sum \alpha_{pqr} x^p y^q \varepsilon^r \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \sum \beta_{pqr} x^p y^q \varepsilon^r$$

α_{pqr} en β_{pqr} zijn functies van t , voorts $\alpha_{000} = \beta_{000} = 0$ (immers $G(0, t, 0) = 0$).

Formele reeksontwikkeling.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) \quad ; \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t).$$

Substitutie en gelijkstelling van machten van ε levert

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_{100} x_1 + \alpha_{010} y_1 + \alpha_{001}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \beta_{100} x_1 + \beta_{010} y_1 + \beta_{001}$$

.

$$\frac{dx_n}{dt} = \alpha_{n00}x_n + \alpha_{0n0}y_n + u_n; u_n = u_n(t, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1})$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \beta_{n00}x_n + \beta_{0n0}y_n + v_n; v_n = v_n(t, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1})$$

met beginvoorwaarden $x_n(t_0) = \xi_n; y_n(t_0) = \eta_n$.

Het systeem is recursief, dus $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ kunnen stap voor stap worden bepaald.

Wij definiëren thans een majorerend systeem.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = F(\bar{x}, \bar{y}, t, \varepsilon)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = P(\bar{x}, \bar{y}, t, \varepsilon)$$

$$F = \sum A_{pqr} \bar{x}^p \bar{y}^q \varepsilon^r; P = \sum B_{pqr} \bar{x}^p \bar{y}^q \varepsilon^r \text{ met } A_{000} = B_{000} = 0 \text{ en voorts}$$

$$A_{pqr} > |\alpha_{pqr}|, \quad B_{pqr} > |\beta_{pqr}|.$$

Wij ontwikkelen:

$$\bar{x} = \sum \varepsilon^n \bar{x}_n; \quad \bar{y} = \sum \varepsilon^n \bar{y}_n$$

$$\frac{d\bar{x}_n}{dt} = A_{n00}\bar{x}_n + A_{0n0}\bar{y}_n + U_n$$

$$\frac{d\bar{y}_n}{dt} = B_{n00}\bar{x}_n + B_{0n0}\bar{y}_n + V_n$$

$$\bar{x}_n(t_0) = \xi_n \quad \bar{y}_n(t_0) = \eta_n.$$

Eigenschappen van het majorerend systeem:

daar voor $t = t_0$ $\bar{x}_n = x_n$ en $\bar{y}_n = y_n$ volgt voor $t = t_0$

$$\left| \frac{dx_1}{dt} \right| < \frac{d\bar{x}_1}{dt} \quad , \quad \left| \frac{dy_1}{dt} \right| < \frac{d\bar{y}_1}{dt} \dots\dots\dots (I)$$

Er volgt, t.g.v. de continuïteit, dat in $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$

$$|x_1| < \bar{x}_1 \quad ; \quad |y_1| < \bar{y}_1 \dots\dots\dots (II)$$

maar dan is opnieuw (I) waar, zodat wij kunnen uitbreiden, totdat (I) en (II) waar zijn in $t_0 \leq t \leq t_1$, d.w.z. het interval, waarin de ontwikkelingen van ϕ , ψ , F en P gelden.

Men gaat hiermee door voor x_2 , y_2 , enz., totdat uiteindelijk door inductie geldt

$$\left| \frac{dx_n}{dt} \right| < \frac{d\bar{x}_n}{dt} \quad ; \quad \left| \frac{dy_n}{dt} \right| < \frac{d\bar{y}_n}{dt}$$

$$|x_n| < \bar{x}_n \quad \quad \quad |y_n| < \bar{y}_n$$

Dus wij hebben formele majorerende reeksen.

Keuze van majorerende functie.

Laat nu ϕ en ψ te ontwikkelen zijn voor $|x| + |y| \leq \rho$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Het is duidelijk dat

$$|\alpha_{pqr}| < \frac{M}{\rho^{p+q} \varepsilon_0^r} \quad , \quad |\beta_{pqr}| < \frac{M}{\rho^{p+q} \varepsilon_0^r}$$

immers, de termen van de reeks $\alpha_{pqr} x^p y^q \varepsilon^r$ moeten begrensd zijn. Als nu

$|\alpha_{pqr}| \rho^{p+q} \varepsilon_0^r < M$ dan is aan de begrensdheid zeker voldaan, daar

$|x|^p |y|^q$ maximaal $\rho^p \rho^q \rho^{p+q}$ is met $m+n = 1$, $m > 0$ en $n > 0$.

Beschouw nu de functie

$$F_1 = \frac{M \left[\frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right]}{1 - \left[\frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right]} .$$

Voor $|\bar{x}| + |\bar{y}| < \rho$ en $\varepsilon < \varepsilon_0$ hebben wij de convergente reeks

$$F_1 = M \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right]^n.$$

De coëfficiënten van deze reeks voldoen aan alle eisen.

Wij kiezen nu

$$F = P = M \left[\frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right] \cdot \frac{1 + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{1 - \frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Deze voldoen a fortiori.

Stel nu:

$$\frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\bar{y}}{dt} \right] = 2 \frac{M}{\rho} \zeta \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}.$$

Oplossing is:

$$\frac{2M}{\rho} t = \log \left\{ \frac{\zeta}{(\zeta + 1)^2} \right\} + c.$$

Overigens is

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{\rho}; \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{y}}{dt}$$

$$\bar{x}(0) = \varepsilon c_1 \quad \bar{y}(0) = \varepsilon c_2.$$

Bijgevolg is

$$\bar{x} = \bar{y} + \varepsilon(c_1 - c_2); \quad \zeta(0) = \varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{c_1 + c_2}{\rho} \right] = \varepsilon \mu$$

$$\bar{y} = \frac{\rho}{2} \left| \zeta - \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{c_1 - c_2}{\rho} \right) \right|.$$

Wij hebben nog: $c = - \log \left\{ \frac{\varepsilon \mu}{(\varepsilon \mu + 1)^2} \right\}$

zodat uiteindelijk:

$$\frac{\xi}{(\xi + 1)^2} = \frac{\varepsilon\mu}{(\varepsilon\mu + 1)^2} e^{\frac{2M}{\rho} t} = k.$$

$$\xi^e + (2 - \frac{1}{k})\xi + 1 = 0 \quad \xi = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - 2 \pm \sqrt{(2 - \frac{1}{k})^2 - 4} \right]$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - 2 \pm \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{4}{k}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - 2 \pm \frac{1}{k} \sqrt{1 - 4k} \right] \end{aligned}$$

Als nu $4k < 1$, dan volgt de limietontwikkeling. Wij nemen het - teken, opdat $\xi \rightarrow 0$ als $k \rightarrow 0$ (d.w.z. $\varepsilon \rightarrow 0$).

Er volgt een convergente ontwikkeling

$$\xi = \frac{1}{2} k + \frac{1}{4} k^2 + \dots$$

met de conditie

$$\frac{\varepsilon\mu}{(\varepsilon\mu + 1)^2} e^{\frac{2Mt}{\rho}} < \frac{1}{4}.$$

Conclusies. Voor $0 \leq t \leq T$ en ε voldoende klein convergeert de reeks

$$\bar{x} = \sum \varepsilon^n \bar{x}_n \quad \text{en} \quad \bar{y} = \sum \varepsilon^n \bar{y}_n.$$

Bijgevolg convergeert absoluut en uniform de reeks

$$x = \sum \varepsilon^n x_n \quad y = \sum \varepsilon^n y_n.$$

Hetgeen te bewijzen was.

Ons resultaat bevat een beperking t.a.v. tijdsinterval. Deze heeft twee oorzaken

- 1) De veronderstelling, dat f ontwikkelbaar is in $0 \leq t \leq t_1$
- 2) De eis $k < \frac{1}{4}$.

Stel nu dat wij hadden $t_1 = \infty$, bijv. bij een autonoom systeem. Blijft $k < \frac{1}{4}$. Maar deze legt een beperking op aan de tijd die voortvloeit uit een vrij willekeurige keuze van de majorerende functies. De vraag is of een betere techniek van bewijsvoering deze zou kunnen wegnemen, met andere woorden, of een andere keuze van majorerende functies misschien minder stringente eisen aan het tijdsinterval zou opleggen. In elk geval hebben wij de ontwikkeling bewezen, geldig in een eindig, nader te preciseren, tijdsinterval.

Resumerend en paraphraserend nu:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = f(X, t, \varepsilon) \\ \text{Zij } f(X, t, \varepsilon) \text{ analytisch in } X \text{ en } \varepsilon \text{ voor } \|X\| \leq \rho \\ \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad |t - t_0| \leq h \\ \text{dan is } X \text{ analytisch in } \varepsilon \text{ voor } \varepsilon \leq \varepsilon_0^* \text{ en } |t - t_0| \leq T. \end{array} \right.$$

Periodieke oplossingen van de vergelijking van Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}.$$

Wij zoeken naar periodieke oplossingen, waarvan de periode a priori onbekend is. Desondanks zouden wij de ontwikkelingsstelling onmiddellijk kunnen toepassen en de onbekendheid van de periode later kunnen uitwerken in de periodiciteitscondities (oude methode). Dit geeft nogal onoverzichtelijke berekeningen, met als resultaat wel een convergente reeks en een periodieke oplossing, maar seculaire termen in hogere benaderingen. Dit is bezwaarlijk, want voor de berekeningen kapt men de reeks af en dit heeft tot gevolg dat in elke eindige benadering de oplossing niet-periodiek is. In het oorspronkelijke werk van Poincaré had dit geen praktische bezwaren.

Wegens de grote periode van astronomische verschijnselen. Zie voor uitwerking van oude methode Davies of James.

Moderne elegante methode was gesuggereerd door Krylov-Bogoliubov, verder uitgewerkt door Malkin. Wij volgen hier Roseau. In feite is het analoog aan de Lindstedt-procedure, maar nu op gezonde voet.

Wij weten dat er een periodieke oplossing bestaat, met periode (vooralsnog onbekend)

$$\frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \omega(\varepsilon).$$

Aangezien $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x = \xi$ en $\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi = 0$ is

$$\omega(0) = 1.$$

Wij voeren nu een transformatie in van de variabele:

$$\omega t = \tau$$

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 - \varepsilon \eta, \quad \eta \text{ begrepsd, als } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Vergelijking van Van der Pol transformeert nu als volgt

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau} \rightarrow \omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \omega \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \varepsilon \left\{ \eta x + \sqrt{1 - \varepsilon \eta} (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} \right\}.$$

Deze vergelijking voldoet wederom aan de eisen van de ontwikkelingsstelling van Poincaré. Wij gaan dus een ontwikkeling naar ε zoeken van functies van de nieuwe variabele τ .

Wij merken op: η en beginvoorwaarden zijn nog onbekend. Wij eisen een periodieke oplossing met periode 2π (dankzij transformatie is de periode nu bekend).

Periodiciteitsconditie:

$$x = a_0 \cos \tau + b_0 \sin \tau + \varepsilon \int^{\tau} \sin(\tau - \tau') f\left[x, \frac{dx}{d\tau}, \eta, \varepsilon\right] d\tau'.$$

Omdat

$$x(\tau) = x(\tau + 2\pi), \quad \text{geldt}$$

$$\int_{\tau}^{\tau+2\pi} \sin(\tau - \tau') f\left[x, \frac{dx}{d\tau}, \eta, \varepsilon\right] d\tau' = 0.$$

Wij kunnen de tijdsoorspong nog zodanig transformeren, dat

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0.$$

$$[x]_{\tau=0} = a(\varepsilon) \quad \text{zodanig dat oplossing periodiek is.}$$

Men kan nog rigoreus bewijzen dat

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n \quad \text{convergeert voor voldoende kleine } \varepsilon.$$

In de toepassing van de ontwikkelingsstelling van Poincaré stellen wij nu

$$x = a_0 \cos \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau)$$

met conditie $\left[\frac{dx_n}{d\tau}\right]_{\tau=0} = 0.$

$$a = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(0).$$

Dus:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n a_n \quad \text{met} \quad x_n(0) = a_n.$$

Beschouw

$$f = \eta x + \sqrt{1 - \varepsilon \eta (1 - x^2)} \frac{dx}{d\tau}$$

met
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(\tau) \quad x_0 = a_0 \cos \tau$$

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \eta_n$$

Er volgt, dat $f = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n$ convergeert

$$f_0 = \eta_0 x_0 + (1 - x_0^2) \frac{dx_0}{d\tau}$$

etc.

Substitutie van deze reeks en van de reeks voor x'' , die dankzij de ontwikkelingsstelling uniform convergeert, levert na samenvoeging een uniform convergente machtreeks in ϵ , die gelijk is aan nul. Dit kan alleen als coëfficiënt van elke macht van ϵ gelijk aan nul is.

$$\frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + x_n = f_{n-1}, \quad n > 0.$$

$$\left(\frac{dx_n}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0, \quad (x_n)_{\tau=0} = a_n.$$

Voorts levert de ontwikkeling de periodiciteitsconditie in de vorm

$$\int_{\tau}^{\tau+2\pi} \sin(\tau - \tau') f_n d\tau' = 0.$$

Er volgt successievelijk:

$$n = 1: \quad f_0 = a_0 \eta_0 \cos \tau + a_0 \left(\frac{1}{4} a_0^2 - 1\right) \sin \tau + \frac{1}{4} a_0^3 \sin 3\tau.$$

Periodiciteitsconditie levert

$$\eta_0 = 0 \quad a_0^2 = 4.$$

Er volgt:

$$x_1 = a_1 \cos \tau + \frac{3}{4} \sin \tau - \frac{1}{4} \sin 3\tau,$$

waarin a_1 nog onbekend is.

$$\begin{aligned} n = 2: \quad f_1 &= (2\eta_1 + \frac{1}{4})\cos \tau + 2a_1 \sin \tau + 3a_1 \sin 3\tau - \frac{3}{2} \cos 3\tau \\ &+ \frac{5}{4} \cos 5\tau. \end{aligned}$$

Periodiciteitsontwikkeling levert

$$\eta_1 = -\frac{1}{8}, \quad a_1 = 0,$$

zodat volgt:

$$x_2 = a_2 \cos \tau + \frac{3}{16} \cos 3\tau - \frac{5}{96} \cos 5\tau.$$

a_2 is nog onbekend.

$$\begin{aligned} n = 3: \quad f_2 &= 2\eta_2 \cos \tau + (2a_2 + \frac{1}{4})\sin \tau + (3a_2 - \frac{9}{32})\sin 3\tau \\ &+ \frac{35}{24} \sin 5\tau - \frac{7}{12} \sin 7\tau. \end{aligned}$$

De periodiciteitsconditie leidt tot $\eta_2 = 0$ $a_2 = -\frac{1}{8}$.

Dus:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= 2 \cos \tau + \epsilon(\frac{3}{4} \sin \tau - \frac{1}{4} \sin 3\tau) + \epsilon^2[-\frac{1}{8} \cos \tau \\ &+ \frac{3}{16} \cos 3\tau - \frac{5}{96} \cos 5\tau] + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 + \frac{1}{8} \epsilon^2 + \dots$$

$$\frac{1}{\omega} = 1 + \frac{1}{16} \epsilon^2 + \dots \quad \tau \cong \frac{t}{1 + \frac{1}{16} \epsilon^2}$$

Men ziet dus: 1) een convergente ontwikkeling zonder seculaire termen.

2) gecorrigeerde periode: $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(1 + \frac{1}{16} \epsilon^2 + \dots)$.

3) gecorrigeerde amplitude:

$$x(0) = 2 + \frac{1}{96} \epsilon^2 + \dots$$

Opmerking: Men kan op dezelfde wijze de meer algemene vergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon)$$

bestuderen. De ontwikkeling van de theorie is letterlijk dezelfde. Wij hebben geprefereerd de vergelijking van Van der Pol te behandelen, omdat dan de zaken meer tastbaar en overzichtelijk blijven.

Een niet-autonoom probleem

De methode van Poincaré is ook toepasbaar op problemen van het type

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}, \omega t, \varepsilon).$$

Wij zullen de behandeling geven aan de hand van een concreet voorbeeld.

* verg. van Duffing: $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon \{-x^3 + h \cos \omega t\}$ h constant.

Gegeven zij

$$(x)_{t=0} = a$$

$$(\frac{dx}{dt})_{t=0} = 0.$$

Wij zoeken naar een periodieke oplossing met periode $\frac{2\pi}{\omega}$. Immers, het systeem is inhomogeen en wordt aangedreven met deze periode. Het zal blijken dat de periodieke oplossing bestaat, als ω een bepaalde waarde (functie van ε) heeft. Dit treedt overigens ook op in een lineair systeem, zoals onmiddellijk volgt uit voorbeeld:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon h \cos \omega t$$

$$x = a \cos t + \varepsilon h \int_0^t \sin(t - t') \cos \omega t' dt'.$$

Er volgt

$$x = a \cos t + \frac{1}{2} \varepsilon h \left(-\frac{2}{\omega^2 - 1} \cos \omega t + \frac{2}{\omega^2 - 1} \cos t \right).$$

Voor een oplossing met periode $\frac{2\pi}{\omega}$ moet dus $a + \frac{\varepsilon h}{\omega^2 - 1} = 0$.

Wij zullen bij de niet-lineaire problemen analoge resultaten zien, echter ook een nieuw phenomeen.

Dit eenvoudige voorbeeld laat straks een wijziging zien, die wij in de methode moeten aanbrengen bij niet-autonoom systeem:

De oplossing kan een phase-verschil hebben t.a.v. de aandrijvende kracht. Wij moeten dus nu invoeren:

$$\tau = \omega t - \phi.$$

Dit levert

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \varepsilon \{-x^3 + h \cos(\tau + \phi)\}.$$

Wij voeren weer in $\frac{1}{\omega^2} = 1 - \varepsilon\eta$.

Volgt:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \varepsilon \{ \eta x + (1 - \varepsilon\eta) [-x^3 + h \cos(\tau + \phi)] \}.$$

De vergelijking voldoet weer aan de condities van de ontwikkelingsstelling van Poincaré, zodat wij kunnen invoeren:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau)$$

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n$$

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n$$

Dit resulteert in een convergente reeksontwikkeling

$$f = \eta x + (1 - \varepsilon\eta) [-x^3 + h \cos(\tau + \phi)] = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n.$$

$$f_0 = \eta_0 x_0 - x_0^3 + h \cos(\tau + \phi_0) \quad , \quad \text{etc.}$$

$$x_0 = a \cos \tau$$

$$\frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + x_n = f_{n-1} \quad , \quad n > 0$$

$$x_n = 0, \quad \frac{dx_n}{dt} = 0 \quad \text{voor} \quad \tau = 0.$$

Voorts hebben wij de periodiciteitsconditie. Daar:

$$x = a \cos \tau + \varepsilon \int_0^\tau \sin(t-t') f(t') dt'$$

moet

$$\int_\tau^{\tau+2\pi} \sin(t-t') f_n dt' = 0.$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f_0 &= \eta_0 a \cos \tau - a^3 \cos^3 \tau + h \cos(\tau + \phi_0) \\ &= \eta_0 a \cos \tau + h \cos \phi_0 \cos \tau - h \sin \phi_0 \sin \tau \\ &\quad - \frac{1}{4} a^3 (\cos 3\tau + 3 \cos \tau). \end{aligned}$$

$$f_0 = (\eta_0 a + h \cos \phi_0 - \frac{3}{4} a^3) \cos \tau - h \sin \phi_0 \sin \tau - \frac{1}{4} a^3 \cos 3\tau.$$

Periodiciteitsconditie levert

$$\eta_0 a + h \cos \phi_0 - \frac{3}{4} a^3 = 0 \quad , \quad h \sin \phi_0 = 0.$$

$\phi_0 = 2\pi k$, maar een phaseverschil van een veelvoud van 2π is triviaal, dus

$$\phi_0 = 0$$

$$\eta_0 a + h - \frac{3}{4} a^3 = 0.$$

Hieruit volgt als oplossing

$$x_1 = \frac{1}{32} a^3 (-\cos \tau + \cos 3\tau)$$

$$x = a \cos \tau + \epsilon x_1 + \dots$$

$$\tau = \omega t ; \quad \frac{1}{\omega^2} = 1 - \epsilon \frac{1}{a} \left(\frac{3}{4} a^3 - h \right) + \dots$$

In de volgende benaderingen komt een phaseverschuiving $\phi \neq 0$ te voorschijn.

Resonantietrillingen (verg. van Duffing)

Wij kunnen ook het probleem omkeren: gegeven een aandrijvende frequentie ω , wat is de oplossing? Laten wij eerst kijken naar de oplossing van het lineaire probleem:

$$x = a \cos t + \frac{1}{2} \epsilon h \left\{ -\frac{2}{\omega^2 - 1} \cos \omega t + \frac{2}{\omega^2 - 1} \cos t \right\}.$$

Als $\omega = n = 0, 1, 2, \dots$ dan hebben wij een periodieke oplossing met periode 2π . Maar als $\omega = 1$, dan is de amplitude ∞ . Dit is resonantie: wij drijven aan met de frequentie van de eigentrilling van de homogene lineaire vergelijking.

Laten wij nu het niet-lineaire probleem bekijken in het geval van resonantie, d.i. meer in het algemeen:

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 - \epsilon \eta_0 \quad \eta_0 = \text{constante.}$$

Wij zoeken nu naar de periodieke oplossing met periode $\frac{2\pi}{\omega}$. Dus de amplitude is nog onbekend.

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \epsilon \{ \eta_0 x + (1 - \epsilon \eta_0) [-x^3 + h \cos(\tau + \phi)] \}.$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(\tau); \quad \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \phi_n; \quad x_0 = a_0 \cos \tau.$$

$$[x]_{\tau=0} = a = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n a_n ; \quad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0.$$

Tevens geldt de periodiciteitsconditie.

Uitwerking:

$$\eta_0 x + (1 - \varepsilon \eta_0) [-x^3 + h \cos(\tau + \phi)] = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n.$$

$$n = 0: f_0 = (\eta_0 a_0 + h \cos \phi_0 - \frac{3}{4} a_0^3) \cos \tau - h \sin \phi_0 \sin \tau - \frac{1}{4} a_0^3 \cos 3\tau.$$

$$n = 1: f = \eta_0 \sum \varepsilon^n x_n + (1 - \varepsilon \eta_0) \{ -(\sum \varepsilon^n x_n)^3 + h \cos \phi \cos \tau - h \sin \phi \sin \tau \}.$$

Merk op: uitwerking van periodiciteitsconditie op f_0 levert $\phi_0 = 0$.

$$\text{Dus: } \cos \phi = 1 + O(\varepsilon^2) \quad \sin \phi = \varepsilon \phi_1.$$

Er volgt:

$$f_1 = \eta_0 x_1 - 3x_0^2 x_1 + \eta_0 x_0^3 - \eta_0 h \cos \tau - \phi_1 h \sin \tau.$$

Er volgt:

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = f_0, \quad \text{levert met bovenstaande condities}$$

$$\phi_0 = 0; \quad \eta_0 a_0 + h - \frac{3}{4} a_0^3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{32} a_0^3 (-\cos \tau + \cos 3\tau) + a_1 \cos \tau.$$

Dus is de eerste benadering

$$\frac{3}{4} a_0^3 - \eta_0 a_0 - h = 0.$$

Er is dus zeker minstens één reële oplossing a_0 .

Daarmee volgt:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 [\eta_0 - 3x_0^2] + \eta_0 [x_0^3 - h \cos \tau] - \phi_1 h \sin \tau \\ &= \{a_1 \cos \tau + \frac{1}{32} a_0^3 (-\cos \tau + \cos 3\tau)\} \{ \eta_0 - \frac{3}{2} a_0^2 (\cos 2\tau + 1) \} \\ &\quad + \eta_0 \{ \frac{1}{4} (\cos 3\tau + 3 \cos \tau) a_0^3 - h \cos \tau \} - \phi_1 h \sin \tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 = & (a_1 - \frac{1}{32} a_0^3)(\eta_0 - \frac{3}{2} a_0^2) \cos \tau + \frac{1}{32} a_0^2 (\eta_0 - \frac{3}{2} a_0^2) \cos 3\tau \\
& - \frac{3}{4} (a_1 - \frac{1}{32} a_0^3) a_0^2 (\cos \tau + \cos 3\tau) - \frac{1}{32} \frac{3}{4} a_0^5 (\cos 5\tau + \cos \tau) \\
& + \eta_0 (\frac{3}{4} a_0^3 - h) \cos \tau + \frac{1}{4} a_0^3 \cos 3\tau \} - \phi_1 h \sin \tau.
\end{aligned}$$

Periodiciteitsconditie levert:

$$\phi_1 = 0.$$

$$(a_1 - \frac{1}{32} a_0^3)(\eta_0 - \frac{3}{2} a_0^2) - \frac{3}{4} a_0^2 (a_1 - \frac{1}{32} a_0^3) - \frac{3}{4} \frac{1}{32} a_0^5 = 0.$$

$$a_1 [\eta_0 - \frac{9}{4} a_0^2] = \frac{1}{32} \eta_0 a_0^3 - \frac{3}{64} a_0^5$$

$$a_1 = \frac{1}{32} a_0^3 \frac{\eta_0 - \frac{3}{2} a_0^2}{\eta_0 - \frac{9}{4} a_0^2}.$$

Subharmonische resonantie

Niet-lineaire resonantie kan zeer gecompliceerd zijn. Wij signaleren:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \mu \epsilon f(x, \frac{dx}{dt}) + H \cos n\omega t$$

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 - \epsilon \eta, \quad \eta \text{ begrensd.}$$

Als μ voldoende klein is, bestaat er een periodieke oplossing met periode $\frac{2\pi}{\omega}$; dus $\frac{1}{n}$ periode van de aandrijvende frequentie. Dit is subharmonische resonantie. Zie Roseau voor Poincaré's methode en Minorsky voor overzicht.

Hoofdstuk XI. Methode van Van der PolInleiding asymptotiek.

Convergente machtreeksontwikkeling:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x^n$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \varepsilon^n x^n \text{ bestaat.}$$

Asymptotische benadering:

$$x = \xi_0 + O(\varepsilon)$$

$$||x - \xi_0|| \leq \varepsilon c, \text{ c constante, } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Asymptotische machtreeksontwikkeling:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \xi^n$$

$$||x - \sum_{n=0}^m \varepsilon^n \xi^n|| \leq \varepsilon^m c, \text{ } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Hierbij behoeft $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \varepsilon^n \xi^n$ niet te bestaan.

Veelal ook de bijna equivalente definitie

$$f(\varepsilon) = O(\varepsilon^m)$$

ofwel $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^m} \right| \leq c, \text{ c constante.}$

Dus benaderingen, die almaar beter worden naarmate ε kleiner is, maar voor een kleine $\varepsilon \neq 0$ een fout bezitten, die niet willekeurig klein kan worden gemaakt, maar wel minimaal door gebruik van een optimaal aantal termen.

Methode van Van der Pol (intuïtieve afleiding)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \epsilon f(x, \frac{dx}{dt}),$$

dus autonome vergelijking.

$$\frac{dx}{dt} = y ; \quad \frac{dy}{dt} = -x + \epsilon f(x, y).$$

Transformatie: $x = a(t)\cos t + b(t)\sin t$ gesuggereerd door
 $y = -a(t)\sin t + b(t)\cos t$ geval $\epsilon = 0$.

Substitutie:

$$\cos t \frac{da}{dt} + \sin t \frac{db}{dt} = 0$$

$$- \sin t \frac{da}{dt} + \cos t \frac{db}{dt} = \epsilon f(a \cos t + b \sin t,$$

$$- a \sin t + b \cos t)$$

of uiteindelijk:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = -\epsilon \sin t f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \\ \frac{db}{dt} = \epsilon \cos t f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t). \end{array} \right.$$

Eerste constatering: daar $f(x, y)$, x en y begrensd zijn, geldt

$$\frac{da}{dt} = O(\epsilon) , \quad \frac{db}{dt} = O(\epsilon).$$

Tweede constatering: rechterleden kunnen worden opgevat als functies van a , b , t en zijn als functies van t periodiek.

Dus Fourier-reeksen:

$$- \sin t f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) = \frac{1}{2} \phi_0(a, b) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(a, b) \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_n(a, b) \sin nt.$$

$$\cos t f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) = \frac{1}{2} \psi_0(a, b)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(a, b) \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n(a, b) \sin nt$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \phi_0(a, b) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(a, b) \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_n(a, b) \sin nt \right\}$$

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \psi_0(a, b) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(a, b) \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n(a, b) \sin nt \right\}.$$

Van der Pol redeneert nu als volgt: daar a en b in een tijdsinterval ter lengte 2π weinig veranderen ($\frac{da}{dt} = O(\varepsilon)$, $\frac{db}{dt} = O(\varepsilon)$), kunnen de oscillerende termen niet belangrijk zijn. Immers, over het tijdsinterval 2π kunnen wij ϕ_n en ψ_n nagenoeg constant beschouwen, en dat betekent een lineaire aangroeiing van a en b met t , plus een oscillatie om deze aangroeiing.

Van der Pol poneert, dat men in eerste benadering kan stellen

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon \phi_0(a, b)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon \psi_0(a, b)$$

$$\frac{1}{2} \phi_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \tau f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) d\tau$$

$$\frac{1}{2} \psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) d\tau.$$

Men kan nog stellen

$$a = K \cos \theta, \quad b = K \sin \theta, \text{ waarbij}$$

K de amplitudefunctie en θ de phasefunctie is.

$$x = K \cos(t - \theta), \quad \frac{dx}{dt} = -K \sin(t - \theta).$$

Daarmee volgt:

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \tau f[k \cos \tau, -k \sin \tau] d\tau$$

$$k \frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau f[k \cos \tau, -k \sin \tau] d\tau.$$

Men merke op: een periodieke oplossing kan men hebben, als k en θ constant zijn dus als de rechterleden nul zijn. Men herkent de eerste benadering van de periodiciteitsconditie van Poincaré.

Bovendien: Zij $k = k_0$, zodanig dat $\frac{dk}{dt} = 0$. Men kan het gebied (zo dit bestaat) van beginwaarden k bepalen, zodanig dat $k \rightarrow k_0$ als $t \rightarrow \infty$.

Voorbeeld: Vergelijking van Rayleigh

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = -\varepsilon \left[\alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 - \beta \left(\frac{dx}{dt} \right) \right].$$

Dus: $f = f(y)$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \tau \{ \alpha (-k \sin \tau)^3 - \beta (-k \sin \tau) \} d\tau$$

$$k \frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau \{ -\alpha (-k \sin \tau)^3 + \beta (-k \sin \tau) \} d\tau.$$

Uitwerking levert:

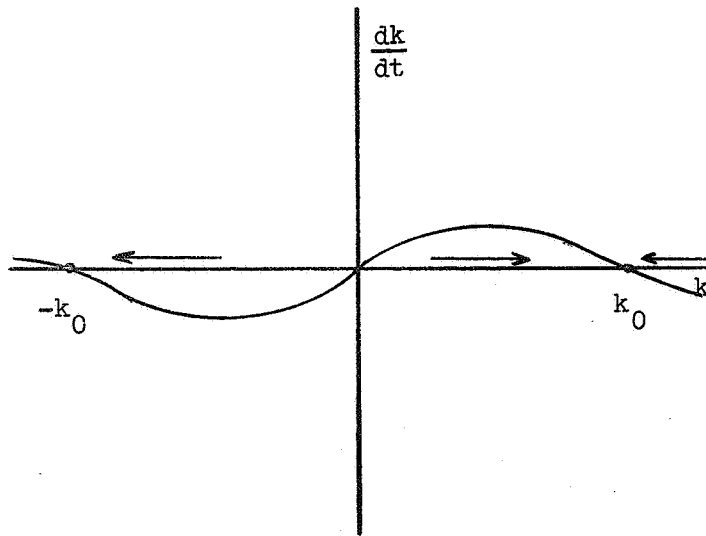
$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon k \left\{ \beta - \frac{3}{4} \alpha k^2 \right\}.$$

$$k \frac{d\theta}{dt} = 0 \rightarrow \theta \text{ is constant, } = 0, \text{ als wij stellen}$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

$$\text{Immers } \frac{dx}{dt} = -k \sin(t - \theta).$$

Voer nu in $k_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\beta}{\alpha}}$



$$\frac{dk}{dt} = \frac{3}{8} \alpha \epsilon k (k_0^2 - k^2)$$

Dus $k = \pm k_0$ is een stabiele periodieke oplossing.

Resumerend: Wij krijgen op een snelle wijze de eerste benadering voor de limit cycle en informatie over de stabiliteit ervan (dit moet nog verder worden bewezen (Roseau)). Wij zullen later zien, dat verdere uitbouw van deze aanpak in staat is veel meer te leveren en een werktuig geeft om verschillende nieuwe fenomenen te onderzoeken. Inmiddels echter hebben wij de methode slechts intuïtief beredeneerd en het wordt tijd om haar beter te funderen.

Fundering van de methode van Van der Pol (naar Roseau)

Beschouw enerzijds de vectorfunctie $X(t)$ met

$$(X)_{t=0} = X_0$$

$$\frac{dX}{dt} = \epsilon f(X, t, \epsilon),$$

waarbij $f(x, t, \epsilon)$ periodiek is t.o.v. t met periode T .

Beschouw anderzijds geassocieerd systeem $\xi(t)$

$$(\xi)_{t=0} = X_0$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon F(\xi)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\xi, t, 0) dt.$$

In de methode van Van der Pol was $X = (a, b)$, $T = 2\pi$ en ξ resulteerde uit vergelijking voor de eerste benadering.

Probleemstelling hierboven is echter veel ruimer en voor uitgebreidere toepassing vatbaar.

Stel voorts: voor $\|X - X_0\| \leq d$, $\epsilon \leq \epsilon_0$

$$M = \sup \left\{ \|f\|, \left\| \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right\|, \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\| \right\}.$$

Wij gaan onderzoeken het verschil van X en ξ :

$$X = X_0 + \epsilon \int_0^t f[X(\tau), \tau, \epsilon] d\tau$$

$$\xi = X_0 + \epsilon \int_0^t f[\xi(\tau)] d\tau.$$

$$\begin{aligned} X(t) - \xi(t) &= \epsilon \int_0^t (f(X(\tau), \tau, \epsilon) - f(X(\tau), \tau, 0)) d\tau \\ &+ \epsilon \int_0^t (f(X(\tau), \tau, 0) - f(\xi(\tau), \tau, 0)) d\tau \\ &+ \epsilon \int_0^t (f(\xi(\tau), \tau, 0) - f(\xi(\tau))) d\tau. \end{aligned}$$

Afschatting van integralen:

$$f(X(\tau), \tau, \epsilon) = f(X(\tau), \tau, 0) + \int_0^\epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon'} d\epsilon'$$

$$\|f(X(\tau), \tau, \epsilon) - f(X(\tau), \tau, 0)\| \leq \int_0^\epsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial \epsilon'} \right\| d\epsilon' \leq M\epsilon,$$

dus
$$\left\| \int_0^t (f(X(\tau), \tau, \epsilon) - f(X(\tau), \tau, 0)) d\tau \right\| \leq \epsilon M t.$$

Op dezelfde wijze

$$f(X, \tau, 0) = f(X_0, \tau, 0) + \int_{X_0}^X \frac{\partial f}{\partial X'} dX'$$

$$f(\xi, \tau, 0) = f(X_0, \tau, 0) + \int_{X_0}^{\xi} \frac{\partial f}{\partial X'} dX'$$

Dus

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (f(X(\tau), \tau, 0) - f(\xi(\tau), \tau, 0)) d\tau \right| &\leq \int_0^t \left| \int_{\xi}^X \frac{\partial f}{\partial X'} dX' \right| d\tau \\ &\leq M \int_0^t |X(\tau) - \xi(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Analoog, maar iets bewerkelijker:

$$\left| \int_0^t (f(\xi(\tau), \tau, 0) - F(\xi(\tau))) d\tau \right| \leq 2MT + 4M^2T\epsilon t.$$

Dus:

$$|X(t) - \xi(t)| \leq \epsilon M \int_0^t |X(\tau) - \xi(\tau)| d\tau + \epsilon \{2MT + (4M^2T + M)\epsilon t\}.$$

Met lemma van Gronwall volgt:

$$|X(t) - \xi(t)| \leq \epsilon \{2MT + (4M^2T + M)\epsilon t\} \exp(\epsilon Mt).$$

Wij hebben dus als resultaat

$$\underline{|X(t) - \xi(t)| = O(\epsilon) \text{ voor } 0 \leq t \leq \frac{c}{\epsilon} .}$$

Dit resultaat, voor de methode van Van der Pol, levert het bewijs van de asymptotische eigenschappen van de oplossing. Tevens is het echter basis voor vele andere onderzoeken (theorie van synchronisatie, zie Roseau).

Wij hebben dus een asymptotische benadering in een zeer groot tijdsinterval. Maar formeel mogen wij niet $t \rightarrow \infty$.

Toch kunnen wij nog onafhankelijk laten zien, dat t.a.v. de periodieke oplossing geen beperking geldt.

Op het oorspronkelijke systeem kunnen wij immers de methode van Poincaré toepassen.

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n X^{(n)}(t)$$

$$\frac{dX^{(0)}}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dX^{(n)}}{dt} = f_{n-1}$$

per conditie: $\int_0^T f_n dt = 0.$

$$f_0 = f(X_0^{(0)}, t, 0) \rightarrow \int_0^T f(X_0^{(0)}, t, 0) dt = 0.$$

Maar dit is de periodieke oplossing van het geassocieerde systeem, dus

$$X - X^{(0)} = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n-1} X^{(n)}(t) \leq \epsilon c,$$

want de reeks convergeert uniform, als f aan de eisen van Poincaré voldoet voor alle tijd.

(Dit veronderstelt echter iets meer dan wij oorspronkelijk van f hebben geëist).

Voorbeeld van toepassing: vergelijking van Van der Pol.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$$

$$x = k \cos(t - \theta).$$

Van der Pol-benadering:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon k \left(1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right)$$

dus er is een periodieke oplossing met $k_0 = 2 + O(\epsilon)$, overeenkomstig het eerder gevondene.

Integreren levert bovendien:

$$k = a_0 \frac{e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\left\{1 + \frac{1}{4} a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad k(0) = a_0,$$

zodat wij ook de wijze van benadering van de limit cycle vinden.

Uiteindelijk:

$$x(t) = a_0 \frac{e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\left\{1 + \frac{1}{4} a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)\right\}^{\frac{1}{2}}} \cos t + O(\varepsilon).$$

Uniform in $0 \leq t \leq \frac{c}{\varepsilon}$, c willekeurige constante.

Alhoewel wij niet lim mogen nemen, kunnen wij stellen, dat εt een willekeurig groot getal is. Dan wordt

$$k = 2 + \text{willekeurig klein getal}.$$

Werk van Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky

In de eerste benadering identiek met Van der Pol, maar men start direct met

$$x = a(t) \cos \psi(t).$$

K-B-M hebben bovendien een procedure uitgewerkt voor systematische constructie van hogere benaderingen. Deze is zeer bewerkelijk (practisch niet erg nuttig).

Bogoliubov-Mitropolsky en Mitropolsky hebben de methode verder uitgebreid tot niet-autonome systemen.

Inhomogene Van der Pol-vergelijking (Resonantie)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = E \sin \omega t.$$

Gedwongen trillingen. Als $\varepsilon \rightarrow 0$ hebben wij lineair

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = E \sin \omega t$$

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + C \sin \omega t.$$

Substitutie levert $C(\omega_0^2 - \omega^2) = E \rightarrow C = \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Wij kunnen hebben $A = B = 0$, als $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = \frac{\omega E}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Wij gaan nu voor de volledige vergelijking de mogelijkheid van periodieke beweging met frequentie ω onderzoeken.

$$x = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \quad \text{voor}$$

$$\frac{da}{dt} \cos \omega t + \frac{db}{dt} \sin \omega t = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon(1 - x^2)y - \omega_0^2 x + E \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + \omega^2 x = -\frac{da}{dt} \omega \sin \omega t + \frac{db}{dt} \omega \cos \omega t = \varepsilon(1 - x^2)y - (\omega_0^2 - \omega^2)x \\ + E \sin \omega t. \end{aligned}$$

Elimineren levert

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\sin \omega t}{\omega} [\varepsilon(1 - x^2)y + (\omega^2 - \omega_0^2)x + E \sin \omega t]$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\cos \omega t}{\omega} [\varepsilon(1 - x^2)y + (\omega^2 - \omega_0^2)x + E \sin \omega t].$$

Stel nu dat $\omega^2 - \omega_0^2 = \varepsilon\lambda$ (dus dicht bij de resonantie) en $E = \varepsilon e$, dan hebben wij een systeem, waarop onze stelling van toepassing is. Geassocieerd systeem is:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\phi \quad ; \quad \frac{db}{dt} = \varepsilon\psi$$

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \{(1 - x^2)y + \lambda x + e \sin \omega t\} dt$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \{(1 - x^2)y + \lambda x + e \sin \omega t\} dt.$$

Uitwerking levert:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ a - \frac{1}{4} (a^2 + b^2)a - \frac{\lambda}{\omega} b - \frac{e}{\omega} \right\}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ b - \frac{1}{4} (a^2 + b^2)b + \frac{\lambda}{\omega} a \right\}.$$

De periodieke oplossing volgt als

$$a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{4} (a_0^2 + b_0^2) \right\} - \frac{\lambda}{\omega} b_0 - \frac{e}{\omega} = 0$$

$$b_0 \left\{ 1 - \frac{1}{4} (a_0^2 + b_0^2) \right\} + \frac{\lambda}{\omega} a_0 = 0.$$

Merk op, dat $b_0 \neq 0$ en $a_0 \neq 0$. Voer thans in $k = a_0^2 + b_0^2 \neq 0$.

Wij hebben door eliminatie

$$k \left(1 - \frac{1}{4} k \right) = \frac{e}{\omega} a_0$$

$$\frac{\lambda}{\omega} k = - \frac{e}{\omega} b_0.$$

Kwadrateren en optellen levert:

$$k^2 \left(1 - \frac{1}{4} k \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 k^2 = \left(\frac{e}{\omega} \right)^2 k.$$

Uiteindelijk:

$$k \left(1 - \frac{1}{4} k \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 k = \left(\frac{e}{\omega} \right)^2.$$

Deze relatie is moeilijk verder te analyseren anders dan bijv. grafisch of numeriek.

Rest nog de analyse van deze singuliere punten.

$$\bar{a} = a - a_0 \quad \bar{b} = b - b_0$$

$$a^2 + b^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\bar{a}a_0 + 2\bar{b}b_0 + a_0^2 + b_0^2$$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ \bar{a} + a_0 - \frac{1}{4} (\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\bar{a}a_0 + 2\bar{b}b_0 + a_0^2 + b_0^2) (\bar{a} + a_0) - \frac{\lambda}{\omega} (\bar{b} + b_0) - \frac{e}{\omega} \right\}$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ \bar{b} + b_0 - \frac{1}{4} (\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\bar{a}a_0 + 2\bar{b}b_0 + a_0^2 + b_0^2) (\bar{b} + b_0) + \frac{\lambda}{\omega} (\bar{a} + a_0) \right\}.$$

Gebruikmakend van de relaties, waaraan a_0 en b_0 voldoen, volgt:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ \bar{a} - \frac{1}{4} ((a_0^2 + b_0^2)\bar{a} + 2\bar{a}a_0^2 + 2\bar{b}b_0a_0 + \dots) - \frac{\lambda}{\omega} \bar{b} \right\}$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ \bar{b} - \frac{1}{4} ((a_0^2 + b_0^2)\bar{b} + 2\bar{a}a_0b_0 + 2\bar{b}b_0^2 + \dots) + \frac{\lambda}{\omega} \bar{a} \right\},$$

zodat de gelinearizeerde vergelijkingen luiden:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}a_0^2\right)\bar{a} - \left(\frac{1}{2}a_0b_0 + \frac{\lambda}{\omega}\right)\bar{b} \right\}$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}b_0^2\right)\bar{b} - \left(\frac{1}{2}a_0b_0 - \frac{\lambda}{\omega}\right)\bar{a} \right\}.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}a_0^2\right) - \lambda & -\left(\frac{1}{2}a_0b_0 + \frac{\lambda}{\omega}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}a_0b_0 - \frac{\lambda}{\omega}\right) & \left(1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}b_0^2\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Uitwerken:

$$\left(1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}a_0^2\right)\left(1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}b_0^2\right) - (2 - k)\lambda + \lambda^2 - \left\{\frac{1}{4}a_0^2b_0^2 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2\right\} = 0$$

$$\lambda^2 - (2 - k)\lambda + \left(1 - \frac{1}{4}k\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{1}{4}k\right) + \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (2 - k)\lambda + \left(1 - \frac{1}{4}k\right)\left(1 - \frac{3}{4}k\right) + \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{2 - k \pm \sqrt{(2 - k)^2 - 4\left(1 - \frac{1}{4}k\right)\left(1 - \frac{3}{4}k\right) - 4\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}\right\}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{-(k - 2) \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 4\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}\right\}.$$

Wij constateren dat wij een limietpunt voor $t \rightarrow +\infty$ hebben en bijgevolg (ook voor de niet-lineaire vergelijking) een stabiele oplossing, onder de volgende condities:

$$1) \quad k > 2 \quad \text{als} \quad \frac{k^2}{4} - 4\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 \leq 0$$

$$2) \quad k > 2 \quad \text{en tegelijkertijd}$$

$$k > 2 + \sqrt{\frac{k^2}{4} - 4\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}, \quad \text{als} \quad \frac{k^2}{4} - 4\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 > 0.$$

Hoofdstuk XIII. Relaxatietrillingen

Inleiding. Beschouw nu $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0$, $\mu \gg 1$. De relaxatietrillingen zijn in karakter nogal verschillend van de eerder bestudeerde periodieke oplossingen voor $\mu \ll 1$. Daar hadden wij een genererende oplossing van een lineair probleem verkregen voor $\mu \rightarrow 0$. Hier volgt voor $\mu \rightarrow \infty$ een triviaal probleem

$$f \frac{dx}{dt} \sim 0.$$

Men kan echter ook transformeren

$$\tau = \mu^\alpha t \qquad \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \mu^\alpha$$

$$\mu^{2\alpha} \frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu^{1+\alpha} f(x) \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Kies bijv. $2\alpha = 1 + \alpha \rightarrow \alpha = 1$, dan volgt

$$\mu^2 \left(\frac{d^2x}{d\tau^2} + f(x) \frac{dx}{d\tau} \right) + x = 0$$

en de genererende vergelijking zou zijn

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + f(x) \frac{dx}{d\tau} \sim 0.$$

Kiest men echter $\alpha = -1$, dan zou de genererende vergelijking zijn

$$f(x) \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Wat nu nemen als uitgangspunt? Het blijkt, dat de oplossing uit stukken bestaat, die elk van één van deze genererende vergelijkingen afkomstig zijn.

Werk van Liénard (1928).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

1) $f(x)$ begrensd op eindig x -interval

2) $f(x) = f(-x)$

3) $f(0) < 0$

4) $F(x) = \int_0^x f(u) du > 0$ voor $x > x_0 > 0$

5) $F(x)$ monotoon stijgend met x voor $x > x_0$

Bijv. v.d. Pol $f(x) = -(1 - x^2)$ voldoet aan 1), 2) en 3).

$$F(x) = -x + \frac{1}{3} x^3 \quad \left. \begin{array}{l} > 0 \text{ voor } x > x_0 = \sqrt{3} \\ = x(\frac{1}{3} x^2 - 1) \end{array} \right\} \text{ en monotoon stijgend.}$$

Wij schrijven $\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt} + \mu F(x)) + x = 0$.

$$\frac{dx}{dt} + \mu F(x) = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Stel $y = \mu z$.

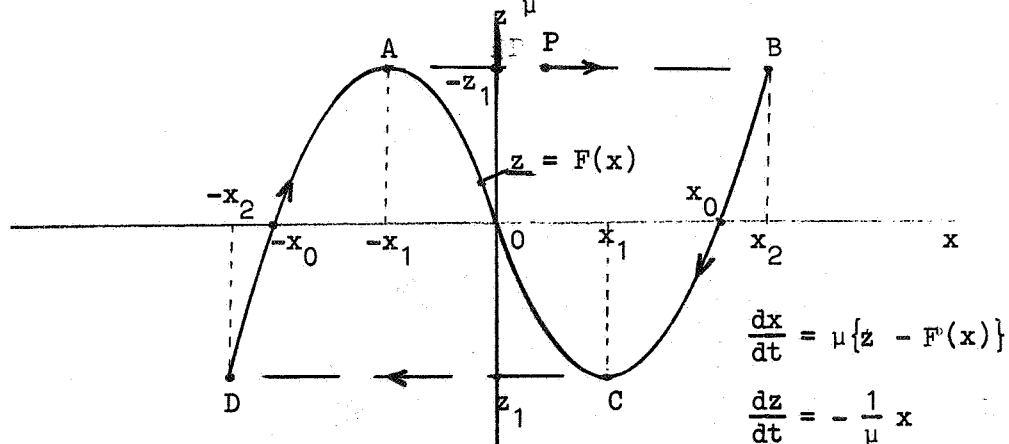
$$\frac{dx}{dt} = \mu \{z - F(x)\}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\mu} x,$$

zodat volgt

$$\{z - F(x)\} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\mu} x.$$

Linkerlid bevat μ niet meer expliciet, rechterlid is klein voor begrensde x . Er volgt

$$\{z - F(x)\} \frac{dz}{dx} = o\left(\frac{1}{\mu}\right) \approx 0.$$



Hoofdstuk XIII. Asymptotische methoden bij niet-autonome systemen

Inleiding. Door Bogoliubov-Mitropolsky is de K-B-methode gegeneraliseerd tot niet-autonome systemen van het type

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f(t, x, \frac{dx}{dt}),$$

waarbij de afhankelijkheid van f t.o.v. t een periodieke functie is. Het gaat dus om stationnaire processen, resonantie, e.d.

Anderzijds is door Mitropolsky de studie ondernomen van niet-stationnaire processen, vergelijkingen, waarbij parameters bijv. langzaam variëren met de tijd, zonder periodiciteit. Dit is een nieuwe ontwikkeling in een klasse problemen, die tot nu toe nogal verwaarloosd werd. Wij gaan een indruk geven van Mitropolsky's werk, waarbij wij ons beperken tot de theorie van de eerste approximatie.

Problemen met "langzame tijd". Het gaat om vergelijkingen van het type

$$\frac{d}{d\tau} \left(m(\tau) \frac{dx}{d\tau} \right) + c(\tau)x = \epsilon P(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau)$$

$$\tau = \epsilon t.$$

Men kan stellen, dat formeel de limiet voor $\epsilon \rightarrow 0$ levert

$$m(0)\ddot{x}^{(0)} + c(0)x^{(0)} = 0,$$

ofwel trillingen met frequentie $\sqrt{\frac{c(0)}{m(0)}}$ en periode $2\pi\sqrt{\frac{m(0)}{c(0)}}$.

De coëfficiënten variëren langzaam t.o.v. de periode van deze genererende oplossing.

Men kan bijv. denken aan een systeem met variabele massa $m(\tau)$, stijfheid $c(\tau)$ en niet-lineaire effecten. Het boek van Mitropolsky geeft een groot aantal voorbeelden.

De methode van Mitropolsky (eerste benadering)

Introduceer, als bij de K-B-M-methode,

$$x = a(t) \cos \psi(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega(t) \sin \psi$$

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{c(t)}{m(t)}} \text{ "instantane eigen frequentie".}$$

Er volgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \psi - a \sin \psi \frac{d\psi}{dt} = -a\omega \sin \psi.$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = m\omega \sin \psi \frac{da}{dt} - m a \omega \cos \psi \frac{d\psi}{dt} - a \sin \psi \frac{d(m\omega)}{dt}.$$

Substitueer dit in de vergelijking

$$-m\omega \sin \psi \frac{da}{dt} - m a \omega \cos \psi \frac{d\psi}{dt} - a \sin \psi \frac{d(m\omega)}{dt} + c a \cos \psi = \epsilon F.$$

$$\frac{da}{dt} \sin \psi + a \cos \psi \frac{d\psi}{dt} = \frac{-a}{m\omega} \sin \psi \frac{d(m\omega)}{dt} + \frac{c}{m\omega} a \cos \psi - \frac{1}{m\omega} \epsilon F$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{m\omega} \sin^2 \psi \frac{d(m\omega)}{dt} - \frac{\epsilon}{m\omega} F \sin \psi + a \sin \psi \cos \psi \left(\frac{c}{m\omega} - \omega \right) =$$

$$= -\frac{a}{m\omega} \sin^2 \psi \frac{d(m\omega)}{dt} - \frac{\epsilon}{m\omega} F \sin \psi, \text{ daar } \frac{1}{m\omega} (c - m\omega^2) = 0.$$

$$a \frac{d\psi}{dt} = -\frac{a}{m\omega} \sin \psi \cos \psi \frac{d(m\omega)}{dt} - \frac{\epsilon}{m\omega} F \cos \psi + \frac{c}{m\omega} a \cos^2 \psi + a\omega \sin^2 \psi$$

$$a \left(\frac{d\psi}{dt} - \omega \right) = -\frac{a}{m\omega} \sin \psi \cos \psi \frac{d(m\omega)}{dt} - \frac{\epsilon}{m\omega} F \cos \psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} - \omega = \frac{d\theta}{dt}. \text{ Dus } \psi = \theta + \int_0^t \omega(\epsilon t') dt'. \text{ Hiervoor schrijft Mitropolsky:}$$

$$\psi \approx \theta + \omega t.$$

Uitvoeriger genoteerd:

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\epsilon}{m(\tau)\omega(\tau)} \left\{ a \sin^2 \psi \cdot \frac{d}{d\tau} (m(\tau)\omega(\tau)) + F(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \tau) \sin \psi \right\}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\epsilon}{m(\tau)\omega(\tau)} \left\{ \sin \psi \cos \psi \cdot \frac{d}{d\tau} (m(\tau)\omega(\tau)) + F(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \tau) \cos \psi \right\}.$$

De rechterleden zijn periodiek in ψ met periode 2π . Wij formeren weer een geassocieerd systeem, waarin de rechterleden gemiddeld zijn over de periode:

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\epsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d}{d\tau} (m(\tau)\omega(\tau)) - \frac{\epsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \tau) \sin \psi \, d\psi$$

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\epsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \tau) \cos \psi \, d\psi.$$

Mitropolsky stelt, dat deze vergelijkingen de eerste benadering voor $\epsilon \rightarrow 0$ van a en θ leveren.

Fundering van de methode-Mitropolsky

Mitropolsky geeft in zijn boek bijzonder uitvoerige bewijsvoering, waarbij niet alleen de eerste benadering, doch ook de door hem ontwikkelde benaderingen van willekeurige orde worden beschouwd. In wezen is alles echter terug te voeren tot de stelling, die in hoofdstuk XI over de methode van Van der Pol werd bewezen, zoals wij nu zullen illustreren aan de hand van de eerste benadering.

Schrijf:

$$\psi = \theta + t^*$$

$$t^* = \int_0^t \omega(\epsilon t') dt' \quad (\text{de afbeelding eindig veronderstellend, etc.})$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = \omega \frac{d}{dt^*}.$$

Er volgt:

$$\frac{da}{dt^*} = - \frac{\epsilon}{m\omega} \left\{ a \frac{dm\omega}{d\tau} \sin^2 (t^* + \theta) + F(a \cos (t^* + \theta), -a\omega \sin(t^* + \theta), \tau) \sin(t^* + \theta) \right\}$$

$$\frac{d\theta}{dt^*} = - \frac{\epsilon}{m\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{dm\omega}{d\tau} \sin 2(t^* + \theta) + F(a \cos(t^* + \theta), -a\omega \sin(t^* + \theta), \tau) \cos(t^* + \theta) \right\}.$$

Wij vormen nu een uitgebreid vectoriëel systeem:

$$a = x_1(t^*) \quad \theta = x_2(t^*) \quad \tau = x_0(t^*)$$

Er volgt:

$$\frac{dX}{dt^*} = \varepsilon f(X, t^*)$$

in het bijzonder

$$\frac{dx_0}{dt^*} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \varepsilon \frac{1}{\omega(\tau)}.$$

Nu is f periodiek in t^* met periode 2π , dus de stelling uit hoofdstuk XI kan onmiddellijk toegepast worden:

$$||X - \xi|| = O(\varepsilon) \quad 0 \leq t \leq \frac{c}{\varepsilon}$$

$$\frac{d\xi}{dt^*} = \varepsilon \int_0^{2\pi} f(X, t^*) dt^* \quad \xi \text{ met dezelfde beginvoorwaarden als } X.$$

Wegens de periodiciteit kunnen wij de integratie-variabele θ opschuiven, er volgt dan

$$\frac{d\xi}{dt^*} = \varepsilon \int_0^{2\pi} f(X, \psi) d\psi.$$

Uiteindelijk teruggaand naar t , volgen de vergelijkingen voor de eerste benadering van Mitropolsky. Voor x_0 levert dit een identiteit op.

Voorbeeld van een toepassing

Slinger met variabele lengte

$$\frac{d}{dt} \{ml^2(\tau) \frac{dx}{dt}\} + 2\sigma \frac{d}{dt} \{l(\tau)x\} + mgl(\tau)\sin x = 0.$$

$l(\tau)$ is de langzaam variërende lengte. $\tau = \varepsilon t$, ε tijdschaal voor de lengte-variatie. m = massa (constant), σ wrijvingscoëfficiënt, eveneens klein, zodat wij stellen

$$\sigma = \varepsilon \bar{\sigma}.$$

Voorts een kleine amplitude, die wij benaderen met

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6} x^3$$

en welke ook met ε gemeten wordt:

$$x = \sqrt{\varepsilon} \bar{x}.$$

Er volgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ m l^2(\tau) \frac{d\bar{x}}{dt} \} + m g l(\tau) \bar{x} &= \varepsilon F \\ F &= \frac{m g l(\tau)}{6} \bar{x}^3 - 2 \bar{\sigma} l(\tau) \frac{d\bar{x}}{dt} + O(\varepsilon) \\ \bar{x} &= a \cos \psi \quad ; \quad \psi = \omega t + \theta \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= -a\omega \sin \psi; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l(\tau)}} \end{aligned}$$

Door toepassing van de methode van Mitropolsky en uitwerking volgt

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\varepsilon \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{m l} + \frac{3}{4} \frac{1}{l} \frac{dl}{d\tau} \right\} a \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\omega \varepsilon \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$

Zij voor $t = 0$, $a = a_0$; $\theta = 0$. Er volgt:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \left\{ \frac{l(0)}{l(\tau)} \right\}^{3/4} \exp \left\{ -\frac{\bar{\sigma}}{m} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{l(\tau')} \right\} \\ \theta &= -\frac{1}{16} \int_0^\tau \omega(\tau') a^2(\tau') d\tau'. \end{aligned}$$

Verdere uitwerking in Mitropolsky.

Verdere uitbreiding:

Mitropolsky breidt uit tot de vergelijking

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau)x &= \varepsilon F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right) \\ \tau &= \varepsilon t; F \text{ is periodiek in } \theta \text{ met periode } 2\pi. \\ \theta &= \theta(t), \text{ zodanig dat } \frac{d\theta}{dt} = v(\tau). \end{aligned}$$

Dus aandrijving met een langzaam variërende frequentie en overigens langzaam variërende andere effecten. Dit brengt met zich mee de studie van resonantie als een instationnair verschijnsel. De methode wordt aangepast maar berust op hetzelfde principe. Uiteindelijk bestudeert Mitropolsky systemen met meerdere vrijheidsgraden.

Hoofdstuk XIV. Asymptotische ontwikkeling volgens Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky

Zij gegeven

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \omega^2 \bar{x} = \varepsilon f(\bar{x}, \frac{d\bar{x}}{dt}) \quad |\varepsilon| \ll 1$$

De limietovergang voor $\varepsilon \rightarrow 0$ leidt weer tot $x = a_0 \cos \psi$ met a_0 constant, $\psi = \omega t + \theta$.

Krylov, Bogoliubov en Mitropolsky geven aan hoe men de oplossing $\bar{x}$ d.m.v. een oneindige asymptotische reeks kan benaderen, zodanig overigens, dat de eerste term van de reeks met de reeds eerder gevonden Van der Pol-benadering overeenkomt. Voor dit doel introduceert men de formele ontwikkeling

$$\bar{x} = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \psi)$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a).$$

Doel is alle grootheden zodanig te bepalen, dat $|\bar{x} - x|$ asymptotisch zeer klein is.

Door K-B-M is aangetoond, dat dit mogelijk is, en dat voor de door hen gegeven constructie van $\bar{x}$ geldt:

$$|\bar{x} - x| = O(\varepsilon^{m+1} t).$$

Men merke op dat de ontwikkeling van $\bar{x}$ nog in dit stadium volslagen willekeurig is: $a = a(\varepsilon, t)$, dus u_1 kan b.v. $\cos \psi$ bevatten, die dan weer bij $a \cos \psi$ zou horen. Om dit eenvoudig te maken spreken wij af:

$$\int_0^{2\pi} u_p(a, \psi) \frac{\sin \psi}{\cos \psi} d\psi = 0 \quad p = 1, 2, \dots, m.$$

Men berekent nu achtereenvolgens $\frac{d\bar{x}}{dt}$ en $\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2}$ door differentiatie.

Daarin komt voor $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2 a}{dt^2}$, etc., die men weer berekent uit $\frac{da}{dt}$, bijv.

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \left\{ \varepsilon \frac{dA_1}{da} + \varepsilon^2 \frac{dA_2}{da} + \dots \right\} \frac{da}{dt} = \varepsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{da} + \varepsilon^3 \dots \text{Analoog } \frac{d^2 \psi}{dt^2}, \text{ enz.}$$

Uitwerking levert op:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \omega^2 \bar{x} = \epsilon \{ & -2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega a B_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_1 \} + \\ & + \epsilon^2 \{ (A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega a B_2) \cos \psi - (2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + aA_1 \frac{dB_1}{da}) \sin \psi \\ & + 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_2 \} + \epsilon^3 \{ \dots \} + \dots \end{aligned}$$

Beschouw nu $\epsilon f(\bar{x}, \frac{d\bar{x}}{dt})$, wij nemen aan, dat f kan worden ontwikkeld in Taylor-reeksen naar $\bar{x}$ en $\frac{d\bar{x}}{dt} = \dot{\bar{x}}$. Volgt:

$$\begin{aligned} \epsilon f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \epsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \epsilon^2 \{ u_1 f_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ + (A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi}) f_{\dot{x}}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \} + \epsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Gelijkstellen van machten van ϵ levert nu:

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) = f_0(a, \psi) + 2\omega A_1 \sin \psi + 2\omega a B_1 \cos \psi$$

$$f_0(a, \psi) = f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)$$

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 \right) = f_1(a, \psi) + 2\omega A_2 \sin \psi + 2\omega a B_2 \cos \psi$$

$$f_1 = f_1(A_1, B_1, u_1, a, \psi) = f_1(a, \psi) \text{ recursief.}$$

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \psi^2} + u_n \right) = f_{n-1}(a, \psi) + 2\omega A_n \sin \psi + 2\omega a B_n \cos \psi$$

$$f_{n-1} \text{ is recursief.}$$

Wij merken nu op dat de oplossingen u_n slechts dan bestaan, als de rechterleden orthogonaal zijn met $\sin \psi$ en $\cos \psi$.

Er volgt:

$$f_0(a, \psi) = g_0^{(0)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ g_n^{(0)}(a) \cos n\psi + h_n^{(0)}(a) \sin n\psi \}.$$

$$A_1 = -\frac{1}{2\omega} h_1^{(0)}(a) ; \quad B_1 = -\frac{g_1^{(0)}(a)}{2\omega a}$$

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{\omega^2} \left\{ g_0^{(0)}(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n^{(0)}(a) \cos n\psi + h_n^{(0)}(a) \sin n\psi}{1 - n^2} \right\}$$

Hiermee zijn A_1 en B_1 bepaald, i.e.

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi$$

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi$$

Tevens u_1 als functie van a en ψ .

Dat het systeem volledig recursief is blijkt o.a. uit beschouwing van u_2 .

Opdat deze bestaat, moet weer orthogonaliteit gelden. $f_1 = f_1(A_1, B_1, u_1, a, \psi)$, A_1, B_1, u_1 zijn nu bepaald, dus $f_1 = f_1(a, \psi)$, periodiek in ψ .

Er geldt dus:

$$A_2 = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) \sin \psi \, d\psi$$

$$B_2 = -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) \cos \psi \, d\psi$$

en een Fourier-reeks voor u_2 .

Men kan zo doorgaan tot u_m , die dan expliciet is gegeven, en een relatie voor A_m en B_m oplevert.

Rest nog te bepalen a en ψ . Deze volgen uit

$$\frac{da}{dt} = \epsilon A_1(a) + \dots + \epsilon^m A_m(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \epsilon B_1(a) + \dots + \epsilon^m B_m(a),$$

waarbij de rechterleden nu ondubbelzinnig zijn bepaald.

Beperken wij ons nu tot $m = 1$, dan vinden wij terug de eerder geconstrueerde eerste benadering, echter met dien verstande, dat nu, volgens K-B-M

$$\bar{x} = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi)$$

$$|\bar{x} - x| = O(\epsilon^2 t).$$

Dit is met het eerder gevondene (zie hoofdstuk XI, methode van Van der Pol) niet in strijd. Immers, toen hadden wij

$$x = a \cos \psi$$

$$|\bar{x} - x| = O(\varepsilon) \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}$$

Voor dit grote tijdsinterval is in de nu gevonden benadering

$$|\bar{x} - x| = O(\varepsilon)$$

zodat het geen zin heeft εu_1 mee te nemen.

Echter, voor kortere tijdsintervallen $0 \leq t \leq T^*$ is

$$|\bar{x} - x| = O(\varepsilon^2) \quad \text{en dus } \bar{x} = a \cos \psi + \varepsilon u_1$$

wel zinvol.

Merk uiteindelijk op: Zij $a = a_0 = \text{constante}$, zodanig dat

$$\varepsilon A_1(a_0) + \dots + \varepsilon^m A_m(a_0) = 0$$

dan definiëert dit een periodieke oplossing en

$$\psi = (\omega + \varepsilon B_1 + \dots + \varepsilon^m B_m)t + \phi_0.$$

Ter fundering van de K-B-M-ontwikkeling moet nog worden aangetoond dat inderdaad

$$|\bar{x} - x| = O(\varepsilon^{m+1}t).$$

Voor de zeer bewerkelijke bewijsvoering verwijzen wij naar het boek van Mitropolsky.

Literatuuroverzicht

1. N. Bogoliubov & Y. Mitropolsky: "Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires", Gauthier-Villars, 1962.
2. L. Cesari: "Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations", Second Edition, Springer, 1963.
3. E.A. Coddington & N. Levinson: "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, 1955.
4. T.V. Davies & E.M. James: "Nonlinear Differential Equations", Addison-Wesley, 1966.
5. N. Minorsky: "Nonlinear Oscillations", Van Nostrand, 1962.
6. Y.A. Mitropolsky: "Problèmes de la théorie asymptotique des oscillations non-stationnaires", Gauthier-Villars, 1966 (Russische editie 1964).
7. V.V. Nemytskii & V.V. Stepanov: "Qualitative Theory of Differential Equations", Princeton University Press, 1960.
8. M. Roseau: "Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité", Springer, 1966.